1. Noções básicas sobre $\mathbb{R}^k$

Começamos por definir convergência de sucessões em $\mathbb{R}^k$. A convergência é definida à custa da noção de distância entre pontos. Podemos então definir continuidade de funções.

1.1. **Convergência em $\mathbb{R}^k$.**

Recordemos primeiro alguns resultados de álgebra linear. A norma dum vector $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ em $\mathbb{R}^k$ é o seu comprimento:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_k^2}$$

(comparar com o teorema de Pitágoras). Num triângulo rectângulo, o comprimento dos catetos é mais pequeno que a hipotenusa. Se x, y forem os catetos, $x, y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Este resultado é válido também em $\mathbb{R}^k$:

Teorema. *Seja $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ um vector em $\mathbb{R}^k$. Então para qualquer i*

$$|v_i| \leq \|\vec{v}\|$$

Demonstração. Claramente $v_i^2 \leq v_1^2 + \ldots + v_i^2 + \ldots + v_k^2$. Tirando a raiz quadrada,

$$|v_i| \leq \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_k^2} = \|\vec{v}\| \qquad \square$$

Dados dois pontos P, Q em $\mathbb{R}^k$, o vector com início em P e extremidade em Q é o vector $\overrightarrow{Q - P}$. A distância d entre P e Q é igual à norma do vector $\overrightarrow{Q - P}$:

$$d = \|\overrightarrow{Q - P}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \ldots + (q_k - p_k)^2}$$

em que $(p_1, \ldots, p_k)$ e $(q_1, \ldots, q_k)$ são as coordenadas de P e Q respectivamente. Então, $|q_i - p_i| \leq \|\overrightarrow{Q - P}\|$ para qualquer i.

Exemplo. A distância entre os pontos $P = (1, 1, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$\|\overrightarrow{Q - P}\| = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

A noção de sucessão em $\mathbb{R}^k$ é completamente análoga à noção de sucessão em $\mathbb{R}$. Uma sucessão em $\mathbb{R}^k$ é uma lista de pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ indexada pelos números naturais. Denotamos uma sucessão por (P_n).

Um resultado de análise I que usaremos várias vezes é o teorema dos limites enquadrados, pelo que o recordamos aqui:

Teorema (Limites enquadrados)**.** *Sejam x_n, y_n, z_n sucessões em $\mathbb{R}$ tais que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

Então, se $\lim x_n = \lim z_n = a$, o limite $\lim y_n$ existe e é igual a a.

Definição: Uma sucessão de pontos (P_n) em $\mathbb{R}^k$ converge para um ponto $P \in \mathbb{R}^k$ se e só se a distância $\|P_n - P\|$ convergir para 0.

Na prática é mais conveniente usar o seguinte resultado:

Teorema. *Uma sucessão (P_n) com coordenadas $P_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$ converge para um ponto $P = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ se e só se, para cada $i = 1, \ldots, k$, a sucessão coordenada $(x_{in})_n$ convergir para a_i.*

Demonstração. Se para cada i, $\lim_{n\to\infty} x_{in} = a_i$, então

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n - P\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_{1n}-a_1)^2 + \ldots + (x_{kn}-a_n)^2} = 0$$

logo $P_n \to P$. Na outra direcção, se $P_n \to P$, como $|x_{in} - a_i| \leq \|P_n - P\|$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_{in} - a_i| \leq \lim_{n\to\infty} \|P_n - P\| = 0$$

Logo, $x_{in} \to a_i$ (limites enquadrados). □

Exemplo. Seja (P_n) a sucessão com termo geral

$$P_n = \left(\frac{n}{n+1}\,,\, e^{-n}\,,\, \operatorname{arctg} n \right)$$

Examinando as sucessões coordenadas temos que

$$\begin{aligned} x_{1n} &= \frac{n}{n+1} \to 1 = a_1 \\ x_{2n} &= e^{-n} \to 0 = a_2 \\ x_{3n} &= \operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2} = a_3 \end{aligned}$$

Assim, $P_n \to P = (1, o, \frac{\pi}{2})$.

Exemplo. Seja (P_n) a sucessão com termo geral

$$P_n = \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\,,\, (-1)^n \right)$$

Examinando as sucessões coordenadas temos que

$$\begin{aligned} x_{1n} &= n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \to 1 = a_1 \\ x_{2n} &= (-1)^n \text{ não converge} \end{aligned}$$

Assim, como uma das sucessões coordenadas não converge, P_n não converge.

Agora vemos facilmente que os resultados sobre limites de sucessões em $\mathbb{R}$ e operações algébricas são tambem válidos em $\mathbb{R}^k$:

- Dadas sucessões $P_n \to P$, $Q_n \to Q$ em $\mathbb{R}^k$, a soma $P_n + Q_n$, é convergente com limite $P + Q$.
- Se λ_n é uma sucessão em $\mathbb{R}$ convergindo para λ, então $\lambda_n P_n$ é convergente com limite λP.

1.2. **Sucessões limitadas.**

Definição: Uma sucessão (P_n) diz-se limitada sse a sucessão $\|P_n\|$ for limitada.

Se uma sucessão limitada P_n tiver coordenadas $P_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ então $|x_{in}| \leq \|P_n\|$ logo as sucessões coordenadas $(x_{in})_n$ também são limitadas.

Em $\mathbb{R}$ sucessões limitadas têm subsucessões convergentes. Tal é também verdade em $\mathbb{R}^k$:

Teorema. *Uma sucessão P_n limitada tem uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Por simplicidade de notação provemos o caso $k = 2$. O caso geral não apresenta dificuldades adicionais.

Seja $P_n = (x_n, y_n)$ uma sucessão limitada. Como $|x_n| \leq \|(x_n, y_n)\|$, a sucessão x_n é limitada logo tem uma subsucessão convergente $x_{n_k} \to x$. Como a subsucessão de y_n correspondente, y_{n_k}, é limitada, tem uma subsubsucessão convergente $y_{n_{k_j}} \to y$. Então a subsubsucessão $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ converge para (x, y). $\square$

Exemplo. Consideremos a seguinte sucessão (x_n, y_n):

$$(\tfrac{1}{2}, 0),\ (\tfrac{3}{2}, 1),\ (\tfrac{1}{3}, 2),\ (\tfrac{4}{3}, 0),\ (\tfrac{1}{4}, 1),\ (\tfrac{5}{4}, 2),\ (\tfrac{1}{5}, 0),\ (\tfrac{6}{5}, 1),\ (\tfrac{1}{6}, 2),\ (\tfrac{7}{6}, 0),\ (\tfrac{1}{7}, 1), \ldots$$

As sucessões das coordenadas são

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{6}{5},\ \ldots \\ y_n &= 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ \ldots \end{aligned}$$

Primeiro escolhemos uma subsucessão convergente de $\{x_n\}$, por exemplo

$$x_1 = \tfrac{1}{2},\ x_3 = \tfrac{1}{3},\ x_5 = \tfrac{1}{4},\ x_7 = \tfrac{1}{5},\ x_9 = \tfrac{1}{6},\ x_{11} = \tfrac{1}{7},\ x_{13} = \tfrac{1}{8}, \ldots$$

Agora olhamos para a subcessão de y_n correspondente:

$$y_1 = 0,\ y_3 = 2,\ y_5 = 1,\ y_7 = 0,\ y_9 = 2,\ y_{11} = 1,\ y_{13} = 0, \ldots$$

e escolhemos uma subsubsucessão convergente. Podemos tomar, por exemplo, $y_1 = 0$, $y_7 = 0$, $y_{13} = 0, \ldots$. Então a subsubsucessão

$$(x_1, y_1) = (\tfrac{1}{2}, 0),\ (x_7, y_7) = (\tfrac{1}{5}, 0),\ (x_{13}, y_{13}) = (\tfrac{1}{8}, 0), \ldots$$

converge para $(0, 0)$.

2. Funções

Tal como funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função entre conjuntos $f : A \to B$ pode ser vista como uma regra que a cada elemento de A faz corresponder um elemento de B.

Exemplo. A função $f(x, y, z) = y$ faz corresponder a cada ponto (x, y, z) no espaço a sua coordenada y.

Exemplo. A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ faz corresponder a cada ponto (x, y) no plano a sua distância à origem.

Exemplo. A temperatura num certo dia depende da latitude x, da longitude y e do instante t em que a temperatura é tomada. É portanto dada por uma função $T(x, y, t)$.

Exemplo. Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ um vector. Consideremos a função $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ dada por $r(t) = t\vec{v}$. A imagem de γ é uma recta que passa pela origem, na direcção do vector $\vec{v}$.

Dar uma função $f : A \to \mathbb{R}^k$ é dar k funções coordenadas $f_1, \ldots, f_k : A \to \mathbb{R}$:

$$f(P) = (\, f_1(P), f_2(P), \ldots, f_k(P)\,)$$

Exemplo. Se $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ e $r(t) = t\vec{v}$, as funções coordenadas de r são $r_i(t) = tv_i$.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. As funções coordenadas de f são $f_1(r,\theta) = r\cos\theta$ e $f_2(r,\theta) = r\sin\theta$. A função $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ dá-nos o vector no plano cujo comprimento é r e cujo ângulo com o eixo dos xx é θ. A esta descrição de vectores em termos de distância à origem e ângulo com o eixo dos xx chamamos coordenadas polares.

Exemplo. Seja $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $\vec{v}(x,y) = (-y, x)$ com funções coordenadas $\vec{v}_1(x,y) = -y$, $\vec{v}_2(x,y) = x$. A função $\vec{v}$ representa um campo vectorial no plano. Este exemplo pode ser visto como descrevendo a velocidade dum líquido em rotação.

Exemplo. A trajectória duma partícula movendo-se no espaço é dada por uma função $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. $\gamma(t) = \big(\, x(t), y(t), z(t)\,\big)$ indica a posição da partícula no instante t.

2.1. **Domínio.** Tal como em $\mathbb{R}$, o domínio duma função $f(x_1, \ldots, x_k)$ de k variáveis é o subconjunto de $\mathbb{R}^k$ em que f está definida.

Recordamos aqui os domínios das funções mais importantes:

- $\frac{\bullet}{w}$ está definida para $w \neq 0$
- $\sqrt{w}$ está definida para $w \geq 0$
- $\log(w)$ está definida para $w > 0$
- $\tan(w)$ está definida para $w \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{cotan}(w)$ está definida para $w \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{Arcsen}(w)$ está definida para $-1 \leq w \leq 1$
- $\operatorname{Arccos}(w)$ está definida para $-1 \leq w \leq 1$
- $\sqrt[2n]{w}$ está definida para $w \geq 0$
- Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, w^α está definida para $w \geq 0$

Exemplo. Seja $f(x,y) = \sqrt{x+y}$. O domínio de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em que $w = x + y \geq 0$, ou seja, o conjunto $\{y \geq -x\}$. Este é o semi-plano por cima do gráfico de $y = -x$.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $f(x,y) = \big(\, \sqrt{\frac{y}{x} - 1}\,, \log(y+4)\,\big)$. O domínio de f é portanto o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

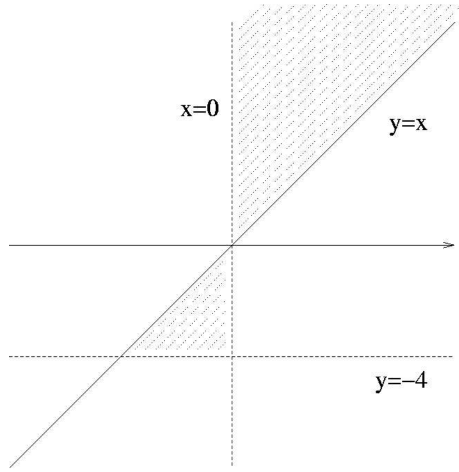
$$x \neq 0 \text{ e } \frac{y}{x} - 1 \geq 0 \text{ e } y + 4 > 0$$

(todas as condições têm que ser satisfeitas para a função estar bem definida). A condição $\frac{y}{x} \geq 1$ requer algum cuidado:

- Se $x > 0$ então $\frac{y}{x} \geq 1 \Leftrightarrow y \geq x$
- Se $x < 0$ então $\frac{y}{x} \geq 1 \Leftrightarrow y \leq x$

Portanto obtemos as condições

$$\big(\, x \neq 0 \text{ e } x > 0 \text{ e } y \geq x \text{ e } y > -4 \,\big)$$
$$\text{ou}$$
$$\big(\, x \neq 0 \text{ e } x < 0 \text{ e } y \leq x \text{ e } y > -4 \,\big)$$



2.2. **Continuidade.** A definição de continuidade é a mesma que para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usando sucessões:

Definição: Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é contínua num ponto $P \in A$ sse para qualquer sucessão $P_n \to P$ em A, se tiver $f(P_n) \to f(P)$.

Exemplo. A função constante $f(x, y, z) = 5$ é claramente contínua: se $(x_n, y_n, z_n) \to (x, y, z)$ então $f(x_n, y_n, z_n) \to f(x, y, z)$.

Exemplo. $f(x, y) = x$ é uma função de 2 variáveis que em cada ponto de $\mathbb{R}^2$ nos dá a coordenada x desse ponto. Esta função é claramente contínua: se $(x_n, y_n) \to (x, y)$ então $f(x_n, y_n) = x_n \to x = f(x, y)$. De igual modo, a função $g(x, y) = y$ também é contínua.

Para ver que uma função f é contínua basta mostrar que cada uma das suas funções coordenadas f_i é contínua: de facto dada uma sucessão $P_n \to P$ em A,

$$f(P_n) = (\, f_1(P_n), \ldots, f_k(P_n)\,)$$

pelo que $f(P_n) \to f(P)$ sse cada $f_i(P_n)$ convergir para $f_i(P)$. Resumindo:

Teorema. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é contínua sse cada uma das funções coordenadas $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for contínua.*

Portanto para estudar continuidade basta-nos estudar as funções coordenadas f_i.

Um exemplo importante de funções são os caminhos:

Definição: Um caminho é uma função contínua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$.

Se $\gamma(t) = (\, x_1(t), \ldots, x_m(t)\,)$, $\gamma(t)$ é contínua sse as funções coordenadas $x_i(t)$ forem contínuas.

Exemplo. Seja $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Como $\cos t, \operatorname{sen} t$ são contínuas, γ é contínua.

Outro resultado bastante útil é o seguinte:

Teorema.
(1) *Somas, diferenças e produtos de funções contínuas são contínuas. Quocientes são contínuos nos pontos em que estão definidos.*
(2) *Polinómios são contínuos.*

Demonstração.

(1) Dadas duas funções contínuas f, g e uma sucessão $P_n \to P$, então $f(P_n) \to f(P)$ e $g(P_n) \to g(P)$. Logo

$$\begin{aligned} f(P_n) + g(P_n) &\longrightarrow f(P) + g(P) \\ f(P_n) - g(P_n) &\longrightarrow f(P) - g(P) \\ f(P_n)\, g(P_n) &\longrightarrow f(P)\, g(P) \end{aligned}$$

Portanto $f+g$, $f-g$ e fg são contínuas. Se P_n e P pertencerem ao domínio de f/g, então também se tem

$$\frac{f(P_n)}{g(P_n)} \longrightarrow \frac{f(P)}{g(P)}$$

Logo f/g é contínua.

(2) Um polinómio é formado por somas e produtos de funções contínuas (as projecções nas coordenadas e as constantes) logo é contínuo. $\square$

Exemplo. As funções $f(x,y,z) = 3x^3y + xyz + 4z^2$, $g(x,y,z) = \pi x - 4y + xz^7$ são exemplos de polinómios em 3 variáveis. Um polinómio é uma função obtida a partir das coordenadas $x_1, \ldots, x_k$ e das constantes por somas e produtos. Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y + x \cdot y \cdot z + 4 \cdot z \cdot z \\ g(x,y,z) &= \pi \cdot x - 4 \cdot y + x \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \end{aligned}$$

Concluimos pelo resultado anterior que os polinómios são funções contínuas.

Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, podemos formar a composição

$$\begin{aligned} g \circ f :\ & A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \\ & x \longmapsto f(x) \longmapsto g(\,f(x)\,) \end{aligned}$$

Teorema. *Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções contínuas. Então a composição $g \circ f : A \to C$ é contínua.*

Demonstração. Dada uma sucessão P_n em A convergindo para P, queremos mostrar que $g(\,f(P_n)\,) \to g(\,f(P)\,)$.

Como f é contínua, $f(P_n) \to f(P)$. $f(P_n)$ é então uma sucessão em B e como g é contínua, $g(\,f(P_n)\,) \to g(\,f(P)\,)$. Logo $g \circ f$ é contínua. $\square$

Exemplo. Seja $f(x,y) = \frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^6+y^8}}$. O domínio de f é $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (porquê?). Mostremos que f é contínua no seu domínio:

- $x^6 + y^8, x^3y$ são polinómios logo são contínuos.
- $\sin(x^3y)$ é a composição

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{x^3y} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin(\cdot)} \mathbb{R}$$

de funções contínuas logo é contínua.
- $\sqrt{x^6+y^8}$ é a composição

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{x^6+y^8} \mathbb{R} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R}$$

de funções contínuas logo é contínua.
- f é o quociente de funções contínuas logo é contínua no seu domínio.

3. Limites

Vamos agora estudar a noção de limite em $\mathbb{R}^k$. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ uma função de domínio D e seja $P_0 \in \mathbb{R}^k$ um ponto. Queremos estudar o limite de $f(P)$ quando $P \to P_0$.

Definição: Dizemos que f converge para $Q \in \mathbb{R}^m$ quando $P \to P_0$, e escrevemos

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = Q$$

sse para qualquer sucessão $\{P_n\}$ de pontos em D convergindo para P_0 se tiver $f(P_n) \to Q$.

3.1. **Aderência.** É perfeitamente possível que não exista nenhuma sucessão (P_n) em D convergindo para P_0. Claramente esta situação não tem interesse. Introduzimos por isso a noção de aderência dum conjunto D:

Definição: Dizemos que um ponto P_0 é aderente a um conjunto D sse existir uma sucessão de pontos em D convergindo para P_0. Chamamos aderência de D ao conjunto de todos os pontos aderentes a D. Representamos a aderência de D por $\bar{D}$.

Exemplo. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 1\}$. Mostremos que a origem $P_0 = (0,0)$não é aderente a D. Seja $P_n = (x_n, y_n)$ uma sucessão de pontos em D. Então $\|P_n - 0\| = \sqrt{(x_n - 0)^2 + (y_n - 0)^2}$. Mas como $P_n \in D$, $\|P_n - 0\| > 1$ logo P_n não pode convergir para 0.

Exemplo. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,: x > 0\}$. Então $P_0 = (0,0) \notin D$. Mostremos que P_0 é aderente a D. Seja $P_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Então $P_n \in D$ e $P_n \to P_0$ logo P_0 é aderente a D.

3.2. **Prolongamento por continuidade.** Se $P_0 \in D$ e f é contínua em P_0, $f(P_n) \to f(P_0)$ para qualquer sucessão $P_n \to P_0$ logo $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$. Tem mais interesse a situação em que $P_0 \notin D$.

Exemplo. A função $f(x,y) = \frac{\sin x}{x} - \cos(xy + \pi e^{x^2+y^2})$ tem como domínio o conjunto

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\ \}$$

O ponto $(0,0)$ está na aderência de D. Calculemos o limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

A função $\cos(xy + \pi e^{x^2+y^2})$ é contínua logo

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \cos(xy + \pi e^{x^2+y^2}) = \cos(0 + \pi e^0) = -1$$

Dada uma sucessão $(x_n, y_n) \to (0,0)$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

Logo $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Portanto $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1 - (-1) = 2$.

No exemplo anterior podemos estender o domínio de f ao ponto $(0,0)$ definindo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \cos(xy + \pi e^{x^2+y^2}) & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A função resultante é contínua em $(0,0)$ porque sempre que $(x_n, y_n) \to (0,0)$, $f(x_n, y_n) \to 2 = f(0,0)$. A este procedimento chamamos prolongamento por continuidade de f ao ponto $(0,0)$:

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua, $P_0 \in \bar{D} \setminus D$. Dizemos que uma função $\tilde{f} : D \cup \{P_0\} \to \mathbb{R}^m$ é o prolongamento por continuidade de f a P_0 sse $\tilde{f}$ for contínua e $\tilde{f}(P) = f(P)$ sempre que $P \in D$.

Na prática, para calcular limites usa-se muitas vezes limites enquadrados:

Exemplo. Seja $f(x,y) = \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. O domínio de f é $D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Mostremos que

$$\lim_{P \to 0} f(P) = 0$$

Primeiro observamos que $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = \|(x,y)\|^3 = \|P\|^3$. Logo $f(x,y) = \frac{x^3 y}{\|P\|^3}$. Como $|x| \leq \|P\|$ e $|y| \leq \|P\|$, então $|x^3 y| = |x|^3 |y| \leq \|P\|^3 \|P\| = \|P\|^4$. Assim,

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{\|P\|^3} \right| = \frac{|x^3 y|}{\|P\|^3} \leq \frac{\|P\|^4}{\|P\|^3} = \|P\|$$

Tomando o limite quando $P \to 0$, e usando limites enquadrados,

$$0 \leq \lim_{P \to 0} \left| \frac{x^3 y}{\|P\|^3} \right| \leq \lim_{P \to 0} \|P\| = 0$$

Logo, $\lim f(x,y) = 0$. Portanto f pode ser prolongada ao ponto $(0,0)$ ficando definida em $\mathbb{R}^2$.

3.3. **Limites ao longo de caminhos.** Vamos agora estudar um método simples e eficaz de mostrar que uma função não tem limite num ponto $P_0 \in \overline{D} - D$.

Seja $\gamma : [t_0, t_1] \to \overline{D}$ uma função contínua (um caminho) tal que $\gamma(t_0) = P_0$ e $\gamma(t) \in D$ para $t \neq t_0$. Se f tiver limite em P_0, podemos prolongar f por continuidade a P_0 e

$$\lim_{t \to t_0} f(\,\gamma(t)\,) = f\left(\lim_{t \to t_0} \gamma(t)\right) = f(\,\gamma(t_0)\,) = f(P_0)$$

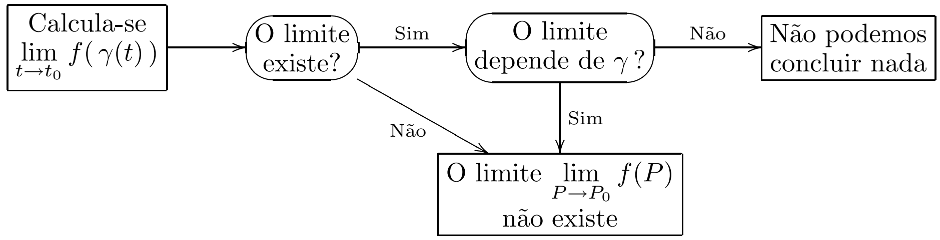
ou seja, o limite não depende da escolha do caminho γ. Escrito doutra maneira,

Teorema. *Se houver 2 caminhos γ_1, γ_2 tais que*

$$\lim_{t \to t_0} f(\,\gamma_1(t)\,) \neq \lim_{t \to t_0} f(\,\gamma_2(t)\,)$$

então f não tem limite em P_0.

Podemos resumir o método no seguinte diagrama:



Exemplo. Seja $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Mostremos que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Consideramos os caminhos $\gamma_m(x) = (x, mx)$ ao longo das rectas $y = mx$ de declive m. Então

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Este limite depende do caminho γ_m (depende de m) logo o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

3.4. **Limites num ponto $P_0 \neq 0$.** Vamos supor que queremos calcular um limite num ponto P_0. É muitas vezes mais fácil fazer primeiro a mudança de variável

$$\Delta P = P - P_0 \qquad\qquad P = P_0 + \Delta P$$

Então

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{\Delta P\to 0} f(P_0 + \Delta P)$$

Ficamos portanto com um limite no ponto zero.

Exemplo. Seja

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^3(y+3)^2}{(x-2)^2 + (y+3)^2}$$

Então o domínio de f é $\mathbb{R}^2 - \{(2,-3)\}$. Calculemos o limite $\lim_{(x,y)\to(2,\text{-}3)} f(x,y)$. Fazemos a mudança de variável

$$\Delta x = x - 2 \qquad\qquad \Delta y = y + 3$$

Então

$$\lim_{(x,y)\to(2,\text{-}3)} f(x,y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(2+\Delta x, -3+\Delta y)$$

Fazendo a substituição,

$$f(2+\Delta x, -3+\Delta y) = \frac{\Delta x^3 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\Delta x^3 \Delta y^2}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2}$$

Então $|\Delta x|, |\Delta y| \leq \|(\Delta x, \Delta y)\|$ logo

$$0 \leq \left| \frac{\Delta x^3 \Delta y^2}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2} \right| \leq \frac{\|(\Delta x, \Delta y)\|^5}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2} = \|(\Delta x, \Delta y)\|^3$$

Portanto

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(2+\Delta x, -3+\Delta y) = 0$$