

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 7

Exercício 1. Averigue se os seguintes limites existem e calcule-os (se existirem).

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y \log y \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$$

$$(4) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \log(xy) \quad (\text{sugestão: } y = e^{-\frac{1}{x^2}})$$

Exercício 2. Seja

$$f(x,y) = \frac{2x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

- (1) Qual o domínio D de f ? Qual a aderência de D ?
- (2) Justifique que f é contínua em D .
- (3) Averigue se os seguintes limites existem. Em caso afirmativo calcule-os.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \qquad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y)$$

Sugestão: poderá ser útil fazer a mudança de variável $X = x$, $Y = y - 1$.

- (4) f pode ser prolongada por continuidade a \mathbb{R}^2 ? Justifique a sua resposta.

Exercício 3. Seja $f(x,y) = xy + x^4$. Mostre que f

- (1) é um infinitésimo de ordem 1
- (2) não é um infinitésimo de ordem 2
- (3) não é um infinitésimo de ordem 3

Exercício 4. Determine, justificando, os pontos de continuidade das funções

$$(1) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{se } P \neq 0 \\ 1 & \text{se } P = 0 \end{cases} \quad (2) g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{se } P \neq 0 \\ 0 & \text{se } P = 0 \end{cases}$$

Exercício 5. Calcule o comprimento do gráfico das seguintes funções:

$$(1) f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x \in [1, 2] \quad (2) f(x) = \cosh x, x \in [0, 1]$$

$$(3) f(x) = e^x, x \in [0, 1] \quad \text{sugestão: substituição } x = \frac{1}{2} \log(t^2 - 1)$$

$$(4) f(x) = x^2, x \in [-1, 2] \quad (5) f(x) = \int_2^{e^x} \sqrt{\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t^2}} dt, x \in [1, 2]$$

Exercício 6. Esboce os seguintes caminhos e descreva a recta tangente no ponto P indicado:

- (1) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $P = (1, 1)$
- (2) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (2, t, 5)$, $P = (2, 3, 5)$
- (3) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) = t^2$, $P = 1$

Exercício 7. A Terra descreve um círculo em torno do sol de raio 1.5×10^8 km em 365 dias. Marte descreve um círculo em torno do sol de raio 2.28×10^8 km em 687 dias. As órbitas dos dois planetas estão no mesmo plano. Escreva o caminho descrevendo o movimento de Marte no céu tal como é visto a partir da Terra. Assuma que para $t = 0$ o Sol, a Terra e Marte estão alinhados no eixo dos xx .

Exercício 8. Uma roda de 20cm rebola sem escorregar numa calha horizontal que identificamos com o eixo dos xx em \mathbb{R}^2 , deslocando-se da esquerda para a direita a uma velocidade de 10cm por segundo. Escreva o caminho descrevendo a trajectória dum ponto na superfície da roda, sabendo que para $t = 0$ esse ponto está em $(0, 0)$.