

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 5

Exercício 1. Usando o polinômio de Taylor de grau 1, obtenha valores aproximados dos seguintes números:

$$(1) \sqrt{99} \quad (2) \sqrt[3]{28} \quad (3) \sqrt[5]{33} \quad (4) \log 1.003 \quad (5) e^{-0.2}$$

Em cada um dos casos dê uma estimativa do erro cometido.

Exercício 2. Use a fórmula de Taylor para aproximar os seguintes integrais com a precisão indicada:

$$(1) \int_0^1 x \cos(x^3) dx \quad \text{com 3 casas decimais}$$

$$(2) \int_0^{0.2} \operatorname{arctg}(x^3) + \operatorname{sen}(x^3) dx \quad \text{com 5 casas decimais}$$

$$(3) \int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2} dx \quad \text{com erro inferior a 0.001}$$

Exercício 3. Calcule os seguintes limites

$$(1) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \operatorname{sen} y}{\log(\cos y^2)} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{1 - e^{x^4}}$$

Exercício 4. Desenvolva em série de Taylor as seguintes funções:

$$(1) 2^{5x} \quad (a = 0) \quad (2) \frac{x+1}{2+3x^3} \quad (a = 0) \quad (3) x \log \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \quad (a = 0)$$

$$(4) \frac{1}{(1-x)(1+x^2)} \quad (a = 0) \quad (5) \frac{1}{x^3} \quad (a = 1) \quad (6) x^2 + x - 1 \quad (a = 1)$$

Em cada caso determine o raio de convergência da série obtida.

Exercício 5. Determine todas as funções analíticas f tais que

$$(1) \forall_{x \in \mathbb{R}} x f'(x) = f(x)$$

$$(2) f(0) = 3 \text{ e } \forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = f(x) + x$$

Exercício 6. Prove, usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, que

$$(1) \left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{6}$$