PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 4

Exercício 1. *Calcule as seguintes primitivas usando as substituições indicadas:*

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx\,,$ $\qquad y = e^x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx\,,$ $\qquad y = \sqrt[4]{x+1}$

(3) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx\,,$ $\qquad x = \operatorname{tg}\theta$

Exercício 2. *Calcule as seguintes primitivas*

(1) $\displaystyle\int x^2\cosh x\,dx$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\int x^3(16x^2-9)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

Exercício 3. *Determine se os seguintes integrais convergem, calculando aqueles que convergirem:*

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2}\,dx$ $\qquad$ (3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $\qquad$ (*sugestão:* $y=\sqrt{x}$)

Exercício 4. *Seja*

$$\varphi(x) = \int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2}\,dt$$

Calcule, justificando, $\varphi(0)$ *e* $\varphi'(0)$.

Exercício 5. *Esboce as seguintes regiões e calcule a sua área:*

(1) $R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le \dfrac{2}{y^2+9}\right\}$

(2) $R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, -2 < x \le 0,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right\}$

Exercício 6. *Determine a função* f *sabendo que*

$$\int_{e^{-x}}^{e^x} f(t)\,dt = x\cosh x - \operatorname{senh} x$$

Exercício 7. *A função gamma é definida, para* $t>0$, *por*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$$

Pode assumir que este integral impróprio existe.

(1) *Mostre que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
(2) *Calcule* $\Gamma(1)$
(3) *Mostre que* $\Gamma(n+1) = n!$
(4) *Use a substituição* $x = e^{-u}$ *para mostrar que*

$$\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx = \frac{n!(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}$$