PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 2

Somas de Riemann: $S_P(f) = \sum f(c_i)\Delta x_i = \sum f(c_i)(x_i - x_{i-1})$
Erro: Se $|f'(x)| \le M$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_P(f)\right| \le M|P|(b-a)$

Exercício 1. *Calcule as somas de Riemann para os integrais e partições indicadas. Estime o erro cometido em cada caso.*

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx \qquad P = \{0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, 2\} \qquad c = (0, 1, 2)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \qquad P = \left\{0, \tfrac{\pi}{10}, \tfrac{\pi}{5}, \tfrac{3\pi}{10}, \tfrac{4\pi}{10}, \tfrac{\pi}{2}\right\} \qquad c = \left(0, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}\right)$

Exercício 2. *A tabela seguinte mostra os resultados de medições da velocidade $v(t)$ duma partícula:*

t	0	0.3	0.6	0.8	0.9
$v(t)$	1.00	0.96	0.83	0.70	0.62

Use uma soma de Riemann com 5 intervalos iguais para estimar a distância percorrida pela partícula de $t = 0$ até $t = 1$.

Exercício 3. *Calcule os seguintes integrais:*

(1) $\displaystyle\int_0^4 (7x^{5/2} - 5x^{3/2})\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x+1)^{10}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^9 (1+\sqrt{x})^2\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{3t}\,dt$ (5) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_1^4 (t^2-2)\sqrt{t}\,dt$

Exercício 4. *Calcule os seguintes integrais:*

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$

Exercício 5. *Resolva a equação diferencial:*

$$y'(x) = e^{x+e^x}\ ,\ y(0) = 0$$

Exercício 6. *Sabendo que* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *calcule, usando somas de Riemann,*

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+1)dx$

Exercício 7. *Calcule os seguintes limites. Sugestão: encontre uma função f tal que o limite seja igual a $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

Exercício 8. *Seja*

$$F(x) = \int_1^x e^{\frac{t^2+1}{t}}\,\frac{dt}{t}$$

Mostre que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$