

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 14

Exercício 1. Mostre que a função definida por $(u, v) = f(x, y)$ com

$$\begin{aligned} u &= e^{xy} + 1 \\ v &= e^{xy} + y^2 \end{aligned}$$

possui, numa bola $B_r(0, 1)$, uma inversa local de classe C^1 . Sendo $g(u, v)$ esta inversa, calcule $\frac{\partial g_2}{\partial u}$ no ponto $(2, 2)$.

Exercício 2. Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1, -1, 2)$, o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2(y^2 + z^2) = 5 \\ (x - z)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

define y e z como funções de x de classe C^1 . Calcule

$$\frac{dy}{dx}(1) \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx}(1)$$

Exercício 3. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v + x) = 1 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0 \end{cases}$$

define implicitamente uma função f que a cada $(x, y) \in B_\varepsilon(0, 1)$ faz corresponder um ponto $(u, v) = f(x, y) \in B_\delta(0, 1)$ para certos $\varepsilon, \delta > 0$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$.

Exercício 4. As funções $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (x + y + z + \text{sen}(xyz), \quad xyz + \text{sen}(x + y + z)) \\ g(w) &= 1 - e^{u-2v} \end{aligned}$$

Mostre que a equação $(g \circ f)(x, y, z) = 0$ define implicitamente numa vizinhança de $(0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ uma função diferenciável $y = h(x, z)$ tal que $h(0, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Calcule $\frac{\partial h}{\partial z}(0, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 5. Sendo $(u, v) = f(x, y)$ a função definida implicitamente pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0 \\ x^2 - y + u - v^2 = 0 \end{cases}$$

de uma bola centrada em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ para uma bola centrada em $(u_0, v_0) = (0, 0)$ e sendo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(u, v) \mapsto (z, w) = (v \cos u, u \text{sen } v)$, calcule $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(0, 0)$.