PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 13

Exercício 1. *Encontre os valores máximo e mínimo (se existirem) das seguintes funções nos conjuntos indicados:*

(1) $f(x,y,z) = 3x + 2y + z$ *em* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
(2) $f(x,y,z) = xyz$ *em* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
(3) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *em* $x^4 + y^4 + z^4 = 3$
(4) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *em* $x + y + z = 1$ *e* $x + 2y + 3z = 6$
(5) $f(x,y,z) = z$ *em* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $2x + 2y + z = 5$

Exercício 2. *Seja T um triângulo com lados de comprimento x, y, z cujo ângulo entre os lados de comprimento x e y é α. Então a lei dos cosenos diz-nos que*

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

Se impusermos que o perímetro do triângulo é P, qual a maior área que o triângulo pode ter? Mostre que essa área é obtida quando o triângulo é equilátero. Nota: a área dum triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}xy\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Exercício 3. *Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$F(x,y) = \left(\frac{xy}{1 - x^2 - y^2}\,,\,\frac{\sqrt{y^2 - x}}{x}\right)$$

Calcule a derivada direccional de F na direcção do vector $\vec{v} = (1,1)$, no ponto $(1,2)$.

Exercício 4. *Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função cujas funções coordenadas g_1 e g_2 são definidas por*

$$g_1(x,y) = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$g_2(x,y) = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

(1) *Calcule a matriz jacobiana de g num ponto arbitrário $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
(2) *Calcule a derivada direccional de g na direcção do vector $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.*

Exercício 5. *Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por*

$$f(x,y) = \left(e^{-xy^2}\,,\,\mathrm{sen}(x+y)\right)$$

(1) *Determine a matriz jacobiana de g num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*
(2) *Mostre que, no ponto $(0,\pi)$, a derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}} \neq 0$ em qualquer direcção.*