PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 12

Exercício 1. *Calcule* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *sabendo que*

(1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$
(2) $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$
(3) $xe^{xy} + ye^{zx} + ze^{xy} = 3$
(4) $x^5 + xy^2 + yz = 5$
(5) $xyz = \operatorname{sen}(x + y + z)$

Exercício 2. *Seja* $y(x)$ *a função definida implicitamente por* $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ *numa vizinhança de* $(1, 2)$*. Escreva o polinómio de Taylor de segundo grau de* $y(x)$ *em torno do ponto* $x = 1$*.*

Exercício 3. *Mostre que a equação* $z^3 + z - 2e^{x^2+y^2}$ *define numa vizinhança do ponto* $(0, 0, 1)$ *uma função implícita* $z = \phi(x, y)$ *com* $\phi(0, 0) = 1$*. Calcule*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0) \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0)$$

Exercício 4. *Para cada uma das seguintes funções calcule a derivada direccional máxima no ponto* P_0*, e indique a respectiva direcção:*

(1) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$, $P_0 = (1, 1)$
(2) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $P_0 = (1, -2)$
(3) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $P_0 = (3, 4)$
(4) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, $P_0 = (1, 5, -2)$
(5) $f(x, y, z) = e^{x-y-z}$, $P_0 = (5, 2, 3)$

Exercício 5. *Escreva a equação do plano ou recta tangente à superfície ou curva indicada em* P_0*:*

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P_0 = (1, 2, 2)$
(2) $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$, $P_0 = (2, 1, 1)$
(3) $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$, $P_0 = (2, 2, 1)$
(4) $2x^2 + 3y^2 = 35$, $P_0 = 2, 3$
(5) $x^4 + xy + y^2 = 19$, $P_0 = (2, -3)$
(6) $xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14$, $P_0 = (5, -2, 3)$

Exercício 6. *Considere a curva de nível*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

Calcule as derivadas $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ *e* $y''\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ *da função implícita definida por esta equação numa vizinhança do ponto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$*.*

Exercício 7. *Assumindo que as variáveis* x, y, z *estão relacionadas por uma equac cão* $g(x, y, z) = C$*, mostre que*

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$