PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 1

Exercício 1. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 4 \\ -1 & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

Calcule

$$(1)\ \int_0^6 f(x)\,dx \qquad (2)\ \int_{\frac{1}{2}}^5 f(x)\,dx \qquad (3)\ \int_0^\pi 1 + \frac{1}{f(t)}\,dt$$

Exercício 2. *Calcule*

$$(1)\ \int_{-1}^2 x\,dx \qquad (2)\ \int_3^4 x\,dx \qquad (3)\ \int_{-1}^2 |1-x|\,dx$$

Exercício 3. *Seja* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Calcule o integral*

$$\int_0^{\sin\theta} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Sugestão: divida a região por baixo do gráfico em duas regiões: um triângulo com vértices $(0,0)$, $(\sin\theta, 0)$ *e* $(\sin\theta, \cos\theta)$ *e um sector circular de ângulo* θ.

Exercício 4. *Sabendo que* $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$ *calcule*

$$(1)\ \int_0^{3\pi} \sin x\,dx \qquad (2)\ \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

$$(3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \qquad (4)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

Exercício 5. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua positiva,* $a, b > 0$.

(1) *Assumindo que* f *é estritamente crescente mostre que*

$$b\,f(b) = a\,f(a) + \int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$$

(2) *Assumindo que* f *é estritamente decrescente mostre que*

$$a\,f(a) + \int_a^b f(x)\,dx = b\,f(b) + \int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy$$

Exercício 6. *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin x\,dx = 0$.

Exercício 7. *Uma função* f *diz-se ímpar se* $f(-x) = -f(x)$. *Mostre que se* f *é ímpar então* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Exercício 8. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(1) *Mostre que, para* $1 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\sin x \le f(x)$.

(2) *Aproveite este resultado para mostrar que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \le \frac{\pi-1}{2}$.