Noção de Integral. Integral é o análogo para funções da noção de soma. Dados n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos tomar a sua soma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. O integral de $x = a$ até $x = b$ duma função contínua f é uma maneira de somar todos os valores $f(x)$ que f toma. Para perceber o que isto significa, comecemos por analizar alguns exemplos em que se usa o integral:

(1) Queremos calcular o valor médio da temperatura ao longo do dia. O valor médio de n números $a_1, \ldots, a_n$ é calculado através de

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Se o valor da temperatura ao longo do dia é dado por uma função $T(t)$ (t em horas), podemos aproximar o valor médio $\bar{T}$ medindo a temperatura de hora a hora, somando e dividindo por 24:

$$\bar{T} \approx \frac{T(1) + T(2) + \ldots + T(24)}{24}$$

Uma aproximação melhor é medir a temperatura todos os minutos e dividir pelo número de minutos num dia:

$$\bar{T} \approx \frac{T(\frac{1}{60}) + T(\frac{2}{60}) + \ldots + T(24)}{24/\Delta t} = \frac{T(\frac{1}{60})\Delta t + T(\frac{2}{60})\Delta t + \ldots + T(24)\Delta t}{24}$$

em que $\Delta t = 1$ minuto $= \frac{1}{60}$ horas é o intervalo entre medições da temperatura. Uma aproximação melhor seria considerar a temperatura todos os segundos. Obteríamos então

$$\bar{T} \approx \frac{1}{24} \sum_{i} T(t_i)\Delta t$$

em que $\Delta t = 1$ segundo e $t_1 = 1$ segundo, $t_2 = 2$ segundos, $t_3 = 3$ segundos, $t_{60} = 1$ minuto e assim sucessivamente. Mas mesmo isto é apenas uma aproximação. O valor médio exacto é apenas obtido quando somamos todos os valores da temperatura. O intervalo Δt tende então para zero. Escrevemos então dt em vez de Δt e pensamos nele como um intervalo de tempo infinitesimal.

Chamamos integral de T a este limite da soma $\sum T(t_i)\Delta t$ e representamo-lo por $\int_{T=0}^{24} T(t)\, dt$. O valor médio é então

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \int_{t=0}^{24} T(t)\, dt$$

De maneira análoga vemos que o valor médio duma função f entre $x = a$ e $x = b$ é dado por

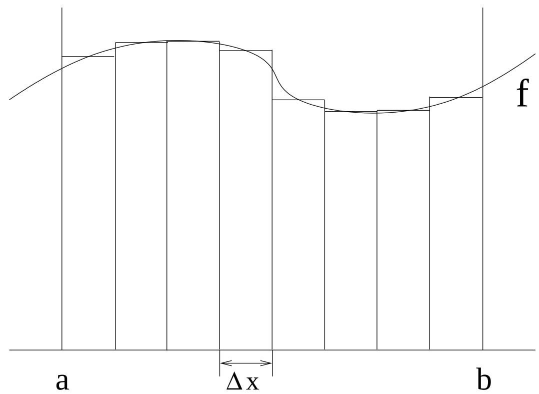
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

(2) Historicamente a noção de integral apareceu primeiro para resolver o problema do cálculo de áreas. Seja $f(x)$ uma função positiva ($f(x) \geq 0$). Seja

R a região do plano entre $x = a$ e $x = b$ por baixo do gráfico de f e por cima do eixo dos xx, ou seja,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

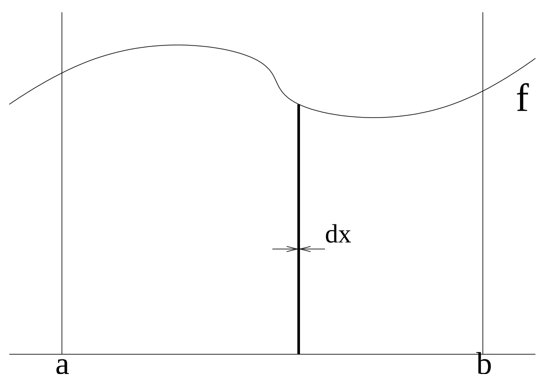
Para calcular a área de R dividimos R em faixas verticais de largura Δx e aproximamos a área de cada faixa pela área dum rectângulo de largura Δx e altura $f(x_i)$:



Então

$$\text{Área}(R) \approx \sum_i f(x_i)\Delta x$$

Para obtermos o valor exacto da área é necessário dividir a região R num número infinito de faixas verticais de largura infinitesimal dx, uma faixa para cada valor de x entre a e b



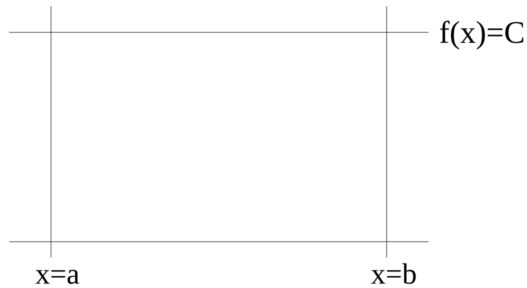
Este limite é precisamente o integral de f:

$$\text{Área}(R) = \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

Vamos então estudar algumas propriedades do integral, tendo como guia estes exemplos. O caso mais simples é aquele em que a função é constante. Em cada um dos exemplos acima teremos

- Se a temperatura $T(t)$ é constante igual a T_0, então o seu valor médio é essa constante: $\bar{T} = T_0 = \frac{1}{24}\int_0^{24} T_0\,dt$. Ou seja, $\int_0^{24} T_0\,dt = 24T_0$.

- Se a função $f(x)$ é constante igual a C, a região R por baixo do gráfico de f é um rectângulo de altura C e base $b-a$:



Portanto
$$\text{Área}(R) = \int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

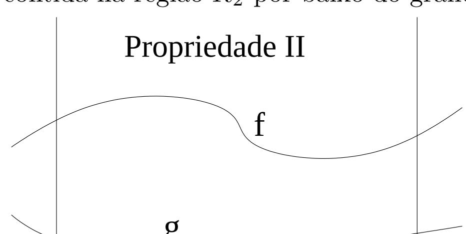
Portanto deveremos ter

Propriedade I: Seja $f(x) = C$ uma função constante. Então
$$\int_a^b f(x)\,dx = C(b-a)$$

Este resultado é análogo ao facto de uma soma de termos constantes $a+a+\ldots+a$ ser igual a a vezes o número de termos.

Agora observemos o seguinte:

- Se durante um dia, a temperatura $T_1(t)$ for sempre inferior à temperatura $T_2(t)$ à mesma hora noutro dia, então a temperatura média nesse dia é tambem inferior. Ou seja,
$$\frac{1}{24}\int_0^{24} T_1(t)\,dt = \bar{T}_1 \leq \bar{T}_2 = \frac{1}{24}\int_0^{24} T_2(t)\,dt$$
- Se $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$, então a região R_1 por baixo do gráfico de g está contida na região R_2 por baixo do gráfico de f:



Logo
$$\int_a^b g(x)\,dx = \text{Área}(R_1) \leq \text{Área}(R_2) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Estes exemplos levam-nos a pedir que

Propriedade II: Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

O mesmo resultado é válido para somas: se para todo o i, $a_i \leq b_i$ então $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Uma consequência imediata das propriedades I e II é a seguinte: se $m \leq f(x) \leq M$ então $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ logo

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \tag{1}$$

Dividindo por $b-a$ podemos interpretar estas desigualdades em termos do valor médio de f:

$$m \leq \bar{f} \leq M$$

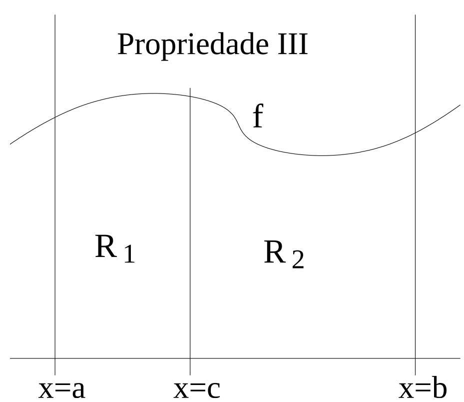
O próximo resultado diz-nos que o valor médio é atingido:

Teorema (Teorema do valor médio)**.** *Seja f uma função contínua. Então existe um $c \in [a,b]$ tal que $\bar{f} = f(c)$. De uma forma equivalente,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Demonstração. Como f é contínua, atinge os seus valores mínimo e máximo $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$. Então $f(x_m) \leq \bar{f} \leq f(x_M)$ logo, pelo teorema do valor intermédio, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \bar{f}$. □

Finalmente temos a terceira propriedade do integral que nos diz o que acontece se dividirmos o intervalo $[a,b]$ em dois intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$:



A linha $x = c$ divide a região R por baixo do gráfico de f em duas regiões R_1 e R_2 e temos que

$$\text{Área}(R) = \text{Área}(R_1) + \text{Área}(R_2)$$

Logo

Propriedade III: Sejam $a \leq c \leq b$. Então

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

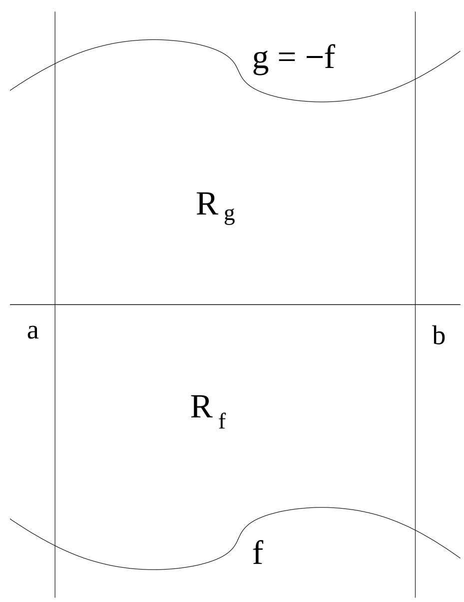
Integral como área. Vimos que, para uma função f positiva, o integral de f é a área da região R por baixo do gráfico de f. Vamos nesta secção descobrir uma interpretação em termos de áreas do integral duma função f não necessariamente positiva. Começamos com o caso duma função $f(x) \leq 0$ sempre negativa. Seja $g(x) = -f(x)$. Então intuitivamente o valor médio de g é o simétrico do valor médio de f: $\bar{g} = -\bar{f}$. Logo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}(b-a) = -\bar{g}(b-a) = -\int_a^b g(x)\,dx = -\text{Área}(R_g)$$

em que R_g é a região por baixo do gráfico de g. Seja R_f a região por cima do gráfico de f:

$$R_f = \{a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq 0\}$$

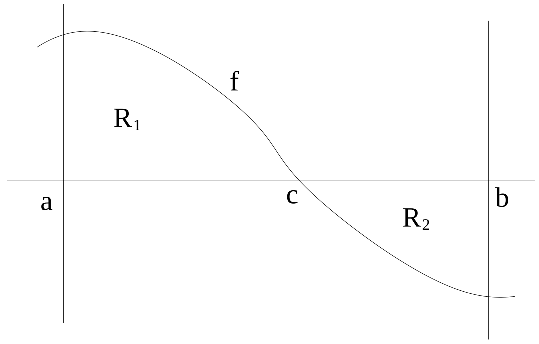
Então $\text{Área}(R_g) = \text{Área}(R_f)$



Logo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{Área}(R_f)$$

Consideremos agora uma função f cujo gráfico é dado pela figura seguinte:



Então

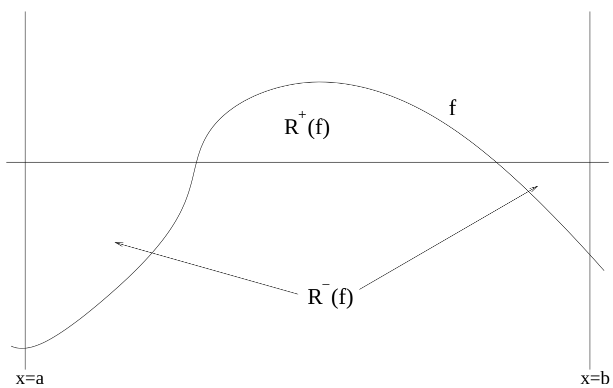
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \text{Área}(R_1) - \text{Área}(R_2)$$

Este exemplo leva-nos à seguinte definição: dada uma função contínua f seja $R^+(f)$ a região do plano entre $x = a$ e $x = b$ por cima do eixo dos xx e por baixo do gráfico de f, ou seja, a região em que $0 \leq y \leq f(x)$:

$$R^+(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Seja $R^-(f)$ a região por cima do gráfico de f, ou seja,

$$R^-(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq 0\}$$



Então o integral entre a e b de f é dado por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área}(R^+(f)) - \text{Área}(R^-(f))$$

Somas de Riemann. Há duas questões essenciais a que queremos responder:

- Dado um problema como escrever um integral para calcular a solução
- Como calcular esse integral

A solução passa por introduzir somas de Riemann. Uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ é um conjunto de números $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$. P

divide o intervalo $[a, b]$ e n intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Pela propriedade III temos então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

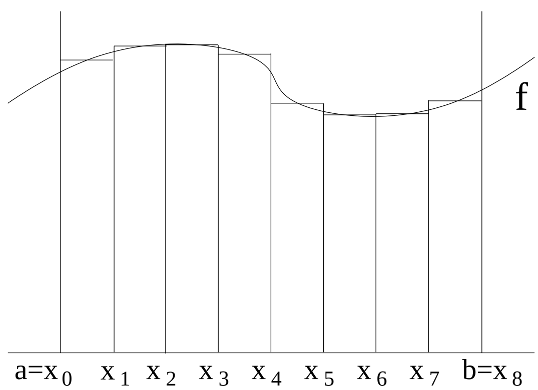
Se os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ forem suficientemente pequenos, então f é aproximadamente constante em cada intervalo. Escolhendo um ponto c_i em cada intervalo, $f(x) \approx f(c_i)$ logo é natural esperar que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(c_i)\, dx = f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

É costume representar as diferenças $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i. Somando em i obtemos

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Esta ideia está ilustrada na figura seguinte, com $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$:



Definição: Seja c o conjunto dos pontos $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. A soma de Riemann $S_{P,c}(f)$ é dada por

$$S_{P,c}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Então $\int_a^b f(x)\, dx \approx S_{P,c}(f)$. Para estudarmos o erro cometido, analizemos a aproximação $f(x) \approx f(c_i)$. Pelo teorema de Lagrange existe um ponto ξ_i entre x e c_i tal que

$$|f(x) - f(c_i)| = |f'(\xi_i)(x - c_i)| = |f'(\xi_i)||x - c_i| \leq |f'(\xi_i)|\Delta x_i$$

Logo a aproximação será tanto melhor quanto mais pequenos forem os intervalos $[x_i, x_{i-1}]$. Por isso introduzimos a noção de módulo $|P|$ duma partição:

Definição: O módulo de P é o comprimento do maior intervalo da partição:

$$|P| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

Seja M tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo o x. Então $|f(x) - f(c_i)| \leq |f'(\xi)|\Delta x_i \leq M|P|$.

Pelo teorema do valor médio, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existem pontos d_i tais que $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(d_i)\Delta x_i$ logo

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(c_i)\Delta x_i\right| = \left|f(d_i)\Delta x_i - f(c_i)\Delta x_i\right| \leq M|P|\Delta x_i \tag{3}$$

(comparar com a equação (2)).

Teorema. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com $|f'(x)| \leq M$. Então*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{P,c}(f)\right| \leq M|P|(b-a)$$

Em particular,

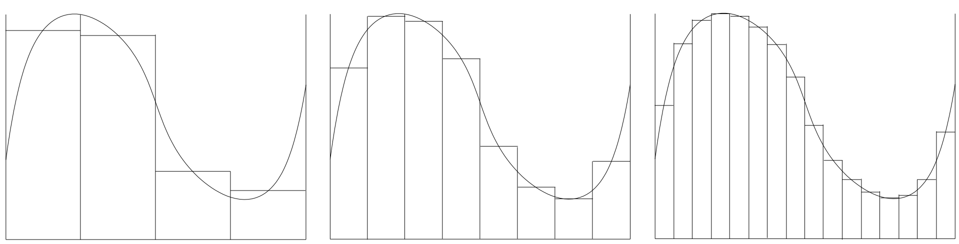
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S_{P,c}(f)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{P,c}(f)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(c_i)\Delta x_i\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(c_i)\Delta x_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n M|P|\Delta x_i \text{ (equação (3))} \\
&= M|P|\sum_{i=1}^n \Delta x_i = M|P|(b-a)
\end{aligned}$$

□

As figuras seguintes representam sucessivas aproximações do integral por somas de Riemann:



Cálculo do integral. Para calcular integrais é de grande utilidade o resultado seguinte:

Teorema. *Seja F uma função com derivada contínua. Então*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração. Seja $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Então

$F(b)-F(a) = F(b)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\ldots+F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)-F(a)$

Pelo teorema de Lagrange, existem pontos c_i tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$$

Logo

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = S_{P,c}(F')$$

Agora basta tomar o limite quando $|P| \to 0$. □

Exemplo. Queremos calcular o integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$. Seja $F(x) = \log x$. Então $F'(x) = \frac{1}{x}$ logo $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = F(2) - F(1) = \log 2 - \log 1 = \log 2$.

Este exemplo mostra que para calcular integrais é necessário, dada uma função f, achar uma função F tal que $F'(x) = f(x)$.

Definição: Dizemos que uma função F é uma primitiva de f se $F'(x) = f(x)$.

Primitivação é portanto a operação inversa da derivação. Ao contrário da derivada, no entanto, uma função tem várias primitivas:

Teorema. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com uma primitiva $F(x)$. Então o conjunto de todas as primitivas de f é constituido pelas funções $F(x) + C$ com $C \in \mathbb{R}$ uma constante. Denotamos este conjunto por*

$$\int f(x)\, dx = \{\, F(x) + C \,:\, C \in \mathbb{R} \,\}$$

Demonstração. Se $F'(x) = f(x)$ então $(F(x) + C)' = f(x)$ logo $F(x) + C$ também é uma primitiva de f. Dada uma primitiva G de f, $G'(x) = F'(x) = f(x)$ logo $(\, G(x) - F(x)\,)' = 0$ portanto $G(x) - F(x)$ é constante. Logo $G(x) = F(x) + C$. □

Exemplo. Algumas primitivas importantes:

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a} + C \ (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C \ (x \neq 0)$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \int \mathrm{sen\,x\,dx = -\cos x + C}$$

$$\int \cos x\, dx = \mathrm{sen\,x + C} \qquad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$$

É natural colocar a seguinte questão: quando é que uma função tem uma primitiva? O próximo teorema diz-nos que qualquer função contínua tem primitivas.

Teorema. *Seja f uma função contínua. Então a função*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

é uma primitiva de f, isto é, F é diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. A prova é uma continha: pela propriedade III,

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Pelo teorema do valor médio existe um c entre x e $x+\Delta x$ tal que

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, necessariamente $c \to x$ logo $f(c) \to f(x)$ e obtemos $F'(x) = f(x)$. □

Um dos métodos mais poderosos para calcular integrais é a mudança de variável: dada uma função diferenciável $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ introduzimos uma nova variável $y = g(x)$.

Teorema. *Seja g uma função diferenciável, f uma função contínua. Então*

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{y=g(a)}^{y=g(b)} f(y)\,dy$$

Demonstração. Seja $F(y)$ uma primitiva de $f(y)$. Então

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx \quad \square$$

Uma notação útil neste contexto é a seguinte: dada uma função diferenciável g escrevemos

$$dg(x) = g'(x)dx$$

Então o teorema diz-nos que

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))dg(x) = \int_{y=g(a)}^{y=g(b)} f(y)\,dy$$