NOTAS

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______
7. ______
8. ______
9. ______
10. ______
11. ______
12. ______

TOTAL

Nome   Número

Análise Matemática II

2º Teste e 1º Exame - 4 de Janeiro de 2005 - 13h
Duração: Teste 1h30m, Exame: 3h
(Cursos: LEEC, LEB, LEAMB, LQ, LEQ)

Apresente e justifique todos os cálculos

Problema 1. (1 ponto)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$. Determine o gradiente de f e calcule a derivada de f no ponto $(x,y) = (2,2)$ na direcção do vector $\vec{v} = (1,2)$.

Problema 2. (1.5 pontos)

Sejam $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $g(1,2) = (1,1,1)$ e

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ u^2 & 0 \\ v & u \end{bmatrix}.$$

Calcule $D(f \circ g)(1,2)$.

Problema 3. (2 pontos)

Considere a função $g(x, y) = 1 - x^3 + x^2 + y^2$.

(a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g na região $x^2 + y^2 < 4$.

(b) Justifique que existem extremos absolutos de g na região $x^2 + y^2 \leq 4$

(c) Determine os extremos absolutos de g na região $x^2 + y^2 \leq 4$

Problema 4. (2 pontos)

Considere a equação $G(x, y, z) = -2x^2z + xy^4 + y^3z^2 = 0$.

(a) Justifique que esta equação determina x como função de y e z ($x = f(y, z)$) numa vizinhança de $(1, 1, 1)$.

(b) Calcule $\nabla f(1, 1)$.

Problema 5. (2 pontos)

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $e^{z-xy} - 1 = 0$.

(a) Determine o plano tangente a S no ponto $(1, 4, 4)$.

(b) Determine o ponto de S em que o respectivo plano tangente é horizontal.

Problema 6. (1.5 pontos)

Sejam A e B duas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. Seja $d > 0$ a distância mínima entre A e B, e sejam $p \in A, q \in B$ tais que $||p - q|| = d$. Mostre que o vector $p - q$ é perpendicular a A em p e perpendicular a B em q.

Fim do Teste. O exame continua na próxima página.

Problema 7. (3 pontos)

Calcule os integrais seguintes:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 x^4 \log x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$

Problema 8. (1 ponto)

Determine os pontos de estacionaridade de

$$g(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}(t^2) dt.$$

Problema 9. (1 ponto)

Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1,\ y \leq 2 - 2x^2,\ x \geq 0\}.$$

Esboce A e calcule a respectiva área.

Problema 10. (1.5 pontos)

Calcule $\frac{1}{0.9}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Problema 11. (2 pontos)

Seja $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

(a) Escreva a série de Taylor de f em $x = 0$.

(b) Determine a derivada $f^{(40)}(0)$.

Problema 12. (1.5 pontos)

Calcule ou mostre que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)+x^3}{x^2+y^2}.$$

Sugestão: poderá ser útil usar a fórmula de Taylor.