NOTAS
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
TOTAL

Nome Número

Análise Matemática II

2º Exame - 18 de Janeiro de 2005 - 13h
Duração: 3h
(Cursos: LEEC, LEB, LEAMB, LQ, LEQ)

Apresente e justifique todos os cálculos

Problema 1. (1.5 pontos)

Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = x^2 - y^2 + x + y$.

Problema 2. (1.5 pontos)

Determine o plano tangente à superfície definida por $\log(1+x^2+y^2) - z = 0$ no ponto $(0,0,0)$.

Problema 3. (2 pontos)

Seja C a elipse definida por $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$.

(a) Calcule os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x$ em C.

(b) Uma faixa vertical em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$. Qual a menor faixa vertical que contém C?

Problema 4. (1.5 pontos)

Considere a função $f(x, y, z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0, 0) = (0, 1, 2)$ e

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ com $\vec{v} = (1, 2)$.

Problema 5. (2 pontos)

Considere a equação

$$z \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + y = 0$$

(a) Justifique que esta equação define, numa vizinhança de $P = (0, 0, 1)$, uma função implícita $y = g(x, z)$ de classe C^1.

(b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 1)$.

Problema 6. (1.5 pontos)

Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y, z) = f(x - y, x + z)$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostre que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

Problema 7. (3 pontos)

Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \log^2(x)\,dx$

Problema 8. (1.5 pontos)

Determine os pontos de estacionaridade da seguinte função

$$f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^{10}}\,dt$$

Problema 9. (1.5 pontos)

Seja R o conjunto

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \leq y \leq 8 - x^2 \right\}$$

Esboce R e calcule a sua área.

Problema 10. (1.5 pontos)

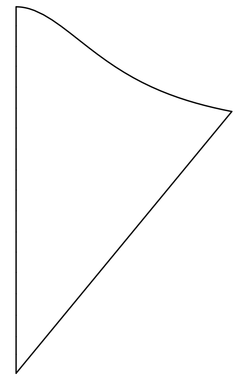
Calcule $e^{0.2}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Problema 11. (1.5 pontos)

Calcule o volume do sólido representado pelo conjunto

$$\left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y < z < 1\,,\, x > 0\,,\, y > 0 \,\right\}$$

Problema 12. (1.5 pontos)



Uma harpa é formada por uma haste vertical ao longo do eixo dos yy, por uma parte superior C_1 ao longo da curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ e por uma parte inferior C_2 ao longo da curva $y = x - \frac{9}{5}$ (ver figura). Entre C_1 e C_2 estão esticadas na vertical, com um intervalo de 0.02, as cordas da harpa. Justifique que o comprimento total ℓ das cordas da harpa satisfaz a relação

$$\int_{0.02}^{2} \left(\frac{50}{1+x^2} - 50x + 90 \right) dx \leq \ell \leq \int_{0}^{1.98} \left(\frac{50}{1+x^2} - 50x + 90 \right) dx$$