Exercícios tipo para o miniteste:

1. Use a substituição indicada para encontrar primitivas das seguintes funções:
   (a) $f(x) = x\sqrt{x^2+9}$, $u = x^2+9$
   (b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3-1}}$, $u = 2x^3-1$
   (c) $f(x) = x\sin(2x^2)$, $u = 2x^2$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}\cos(x^{\frac{3}{2}})$, $u = x^{\frac{3}{2}}$
   (e) $f(x) = (1-\cos x)^5 \sin x$, $u = 1-\cos x$
   (f) $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\sqrt{5+2\sin(3x)}}$, $u = 5+2\sin(3x)$

2. Use a substituição indicada para calcular os seguintes integrais:
   (a) $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\,dx$, $u = 1+\sqrt{x}$
   (b) $\int_0^8 t\sqrt{t+1}\,dt$, $u = t+1$
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$, $u = 1+3\sin\theta$
   (d) $\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$, $u = 4-x$
   (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$, $u = \sin x$

Exercícios tipo para a aula prática:

1. Calcule
   (a) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$
   (b) $\int_0^2 |x-\sqrt{x}|\,dx$
   (c) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx$

2. Prove as seguintes desigualdades usando propriedades do integral, sem calcular nenhum dos integrais:
   (a) $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$
   (b) $\int_2^5 \frac{1}{1+x^5}\,dx \le \int_2^5 \frac{1}{1+x^2}\,dx$
   (c) $\int_0^2 \sin\sqrt{x}\,dx \le 2$
   (d) $\frac{\pi}{8} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \le \frac{\pi}{6}$

3. Calcule a derivada das seguintes funções:
   (a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt$
   (b) $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

(c) $F(x) = \int_x^3 x^2 e^{\sin t}\, dt$

(d) $F(x) = \int_{\cos x}^{x^2+1} e^{-t^2}\, dt$

4. Explique porque é que é evidente que

(a) $$\int_{-1}^{1} \left(\tan x + \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^7} - x^{17}\cos x \right) dx = 0$$

(b) $$\int_{-5}^{5} \left(3x^2 - x^{10}\sin x + x^5\sqrt{1+x^4} \right) dx = 2x^3\Big|_0^5 = 250$$

5. Considere a família de rectângulos com uma aresta no eixo dos xx, uma aresta no eixo dos yy, um vértice na origem e o vértice oposto, P, sobre a recta $x + y = 10$.

(a) Exprima a área de cada rectângulo, $A(x)$, em função da coordenada x do vértice P sobre a linha $x + y = 10$.

(b) Calcule a média $\bar{A}$ das áreas dos rectângulos, com x a variar no intervalo $[0, 10]$.

(c) Encontre todos os rectângulos cuja área $A(x)$ é igual a $\bar{A}$.