Secção de Álgebra e Análise - Departamento de Matemática - IST

Curso de Mestrado em Matemática Aplicada
Tópicos de Topologia - Monopólos e Curvas Algébricas

2ª Série de Problemas - Dezembro 1999

Nesta série de problemas vão ser abordados os conceitos de variedade Kähler e hiperKähler, algumas relações com os quocientes simplécticos e "hipersimplécticos" e alguns exemplos. O problema final ilustra várias propriedades genéricas de sistemas integráveis representáveis por um par de Lax.

2.1 Uma estrutura hermiteana h numa variedade complexa M, é uma aplicação $h : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que se $X, Y \in Vect(M)$ então $h(X, Y)$ é linear em X; $h(X, Y) = \bar{h}(Y, X)$; $h(JX, Y) = ih(X, Y)$ onde J é a estrutura complexa em M; e $h(X, X)$ é definida positiva.

a) Sejam $g = \mathrm{Re}(h)$ e $\omega = -\mathrm{Im}(h)$ as partes real e imaginária de h. Mostre que g define uma métrica riemanniana em M e que ω é uma forma-2 real não-degenerada em M.

b) Mostre que g e ω são compatíveis com J, *i.e.* $g(X, Y) = g(JX, JY)$ e $\omega(X, Y) = \omega(JX, JY)$. Mostre que g e J determinam ω através de $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ e que ω e J determinam g através de $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Finalmente, mostre que - por serem não-degeneradas - g e ω determinam J.

<u>Nota</u>: Note que o tripleto (J, g, ω) fica determinado dando quaisquer dois dos seus constituintes.

<u>Nota</u>: Se ω fôr fechada, *i.e.* $d\omega = 0$, então diz-se uma forma de Kähler e M diz-se uma variedade Kähler.

c) Mostre que qualquer variedade complexa X de dimensão complexa 1, $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$, *i.e.* uma superfície de Riemann, é uma variedade Kähler.

2.2 Mostre que uma sub-variedade holomorfa N de uma variedade Kähler M é também uma variedade Kähler.

<u>Nota</u>: Uma sub-variedade N de M diz-se holomorfa se localmente puder ser definida por equações $z_{p+1} = \cdots = z_n = 0$ onde os $\{z_i\}$ são coordenadas complexas locais em M e

onde $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$ e $\dim_{\mathbb{C}}(N) = p$.

Sugestão: Seja $i : N \longrightarrow M$ a inclusão de N em M. Mostre que se ω é uma forma de Kähler em M então i^*w é uma forma de Kähler em N.

2.3 Considere a acção de $S^1 = U(1)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, dada por $e^{i\theta}(z_1, ..., z_{n+1}) = (e^{i\theta}z_1, ..., e^{i\theta}z_{n+1})$. Como sabe, $\mathbb{C}^{n+1}$ está equipado com a forma simpléctica canónica $\omega = (i/2)\sum_{j=1}^{n+1} dz_j \wedge d\bar{z}_j$. A acção de $U(1)$ é simpléctica e a aplicação momento $\mu : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow u(1)^*$ é dada por $\mu(z, \bar{z})(i\theta) = -(z\bar{z}/2)\theta$, onde $i\theta \in u(1)$.

O conjunto de nível $N = \mu^{-1}(i/2)$ é dado por $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e é portanto uma sub-variedade de $\mathbb{C}^{n+1}$. O quociente simpléctico $Q = N/U(1) = P^n$ é uma variedade que tem estrutura simpléctica $\tilde{\omega}$ dada pelo teorema de Marsden-Weinstein.

Calcule $\tilde{\omega}$ explicitamente, seguindo a construção de Marsden-Weinstein e observe que é também uma forma de Kähler para a estrutura complexa natural em $Q = P^n$.

Nota: Acabou de mostrar que o espaço projectivo complexo P^n é uma variedade Kähler. A métrica determinada por $\tilde{\omega}$ é chamada de métrica de Fubini-Study. Pelo resultado do exercício 2.2 qualquer sub-variedade holomorfa de P^n - uma variedade projectiva - vai ser uma variedade Kähler.

2.4 Uma variedade M diz-se hiperKähler se fôr uma variedade Kähler relativamente a 3 estruturas complexas independentes I, J, K, tais que $IJ = -JI = K, KI = -IK = J, JK = -KJ = I$, compatíveis simultaneamente com uma dada métrica g. Uma tal variedade terá necessariamente dimensão (real) múltipla de 4. Se M é uma variedade hiperKähler então está equipada com 3 formas simplécticas $\omega_I, \omega_J, \omega_K$.

Seja $\mathbb{Z}_2$ o grupo multiplicativo $\{1, -1\}$. $\mathbb{Z}_2$ actua em $\mathbb{R}^3$ através da multiplicação por -1 e em S^1 através de $\theta \to -\theta$ onde θ é a coordenada usual em S^1. Seja $(\mathbb{R}^3)^\star = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

a) Mostre que $(\mathbb{R}^3)^\star/\mathbb{Z}_2 \times S^1$ não é uma variedade hiperKähler.

Sugestão: Uma variedade complexa é sempre orientável, pois a forma $dz_1 \wedge \bar{d}z_1 \wedge \cdots dz_n \wedge \bar{d}z_n$ fornece uma orientação, onde os $\{z_j\}$ são coordenadas complexas locais em M.

b) Mostre que $((\mathbb{R}^3)^\star \times S^1)/\mathbb{Z}_2$ é hiperKähler.

Sugestão: Construa explicitamente 3 estruturas complexas e as três formas simplécticas associadas em $((\mathbb{R}^3)^\star \times S^1)/\mathbb{Z}_2$. Para começar pode pensar em $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$ e nas estruturas complexas dadas por i, j, k.

2.5 Seja M uma variedade hiperKähler com formas simplécticas $\omega_I, \omega_J, \omega_K$. Considere os isomorfismos em cada ponto $p \in M$ dados por $\phi_I : T_pM \longrightarrow T_p^*M$ com $\phi_I(X) = i_X\omega_I$ e analogamente para ϕ_J e ϕ_K. Considere a aplicação $\phi_J^{-1}\phi_I : T_pM \longrightarrow T_pM$.

Mostre que $\phi_J^{-1}\phi_I(X) = K(X)$ e analogamente $\phi_K^{-1}\phi_J(X) = I(X)$ e $\phi_I^{-1}\phi_K(X) = J(X)$.

<u>Nota</u>: Consequentemente, numa variedade hiperKähler, as formas simplécticas "determinam" as estruturas complexas.

2.6 Seja M uma variedade hiperKähler com formas simplécticas $\omega_I, \omega_J, \omega_K$. Seja G um grupo de Lie que actua em M preservando $\omega_I, \omega_J, \omega_K$, de modo a que a acção é hamiltoniana e dá origem a 3 aplicações momento equivariantes $\mu_I, \mu_J, \mu_K : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$.

Seja $N = \mu_I^{-1}(0) \bigcap \mu_J^{-1}(0) \bigcap \mu_K^{-1}(0)$. Assuma que 0 é um valor "limpo" de μ_I, μ_J, μ_K de modo a que, em particular, N seja uma sub-variedade de M. Assuma também que $Q = N/G$ é uma variedade, com $\pi : N \longrightarrow Q$ uma aplicação diferenciável.

Mostre que o "Quociente HiperKähler" Q tem uma estrutura hiperKähler.

<u>Sugestão</u>: a) Seja $i : N \longrightarrow M$ a inclusão. Siga os passos da demostração do teorema de Marsden-Weinstein para a redução simpléctica para concluir que tem 3 formas simplécticas $\tilde{\omega}_I, \tilde{\omega}_J, \tilde{\omega}_K$ em Q com $\pi^*\tilde{\omega}_I = i^*\omega_I$, etc.

b) Use os resultados do exercício 2.5 para mostrar que tem estruturas complexas $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ em Q, com $\tilde{I}\tilde{J} = \tilde{K}$, etc. Note que tem de verificar que estas operações estão bem definidas em classes de vectores $[X]$ em Q representadas por vectores X em N como na construção de Marsden-Weinstein.

c) Note que também tem uma estrutura hermiteana em Q dada por $\tilde{g}([X],[Y]) = \tilde{\omega}_I([X], \tilde{I}[Y]) = \tilde{\omega}_J([X], \tilde{J}[Y]) = \tilde{\omega}_K([X], \tilde{K}[Y])$.

d) Não vale ir espreitar às notas do Hitchin pág.66-68. (Mais do que uma vez...)

2.7 Considere a esfera de Riemann P^1 com a coordenadas complexas usuais: $z \in \mathbb{C}$ em $P^1 \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$ em $P^1 \setminus \{\infty\}$, com a identificação $z = 1/w$ em $P^1 \setminus \{0, \infty\}$.

Um fibrado linha holomorfo sobre P^1 (ou sobre qualquer outra variedade complexa) é um fibrado vectorial complexo de rank 1 - *i.e.* com fibras isomorfas a $\mathbb{C}$ - e tal que as funções de transição - com valores em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - são dadas por funções holomorfas.

Considere o fibrado linha $O(k)$ sobre P^1 definido pela função de transição $g : P^1 \setminus \{0, \infty\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ onde $g(z) = z^k$ e $k \in \mathbb{Z}$.

a) Mostre que uma secção holomorfa de $O(k)$, para $k \geq 0$, é da forma $\sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$, com $a_j \in \mathbb{C}$.

b) Mostre que $O(k)$ não tem secções holomorfas para $k < 0$.

2.8 Sejam $T_i : \mathbb{R} \longrightarrow su(k)$, $i = 1, 2, 3$, três funções de variável real, s, com valores em $su(k)$ - a álgebra de Lie de $SU(k)$ constituída pelas matrizes complexas anti-hermiteanas $k \times k$.

Considere as equações de Nahm - que como vimos na aula são obtidas por redução das equações de Yang-Mills auto-duais:

$$\frac{dT_i(s)}{ds} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[T_j(s), T_k(s)],$$

com $i, j, k = 1, 2, 3$ e com ε_{ijk} completamente anti-simétrico e tal que $\varepsilon_{123} = 1$.

a) Mostre que as equações de Nahm podem ser obtidas da condição

$$[\frac{d}{ds} + iT_1 - \xi(T_3 - iT_2), (T_3 + iT_2) - 2i\xi T_1 + \xi^2(T_3 - iT_2)] = 0,$$

para todo o $\xi \in \mathbb{C}$.

b) Definam-se $T_+ = iT_1 - \xi(T_3 - iT_2)$ e $T = (T_3 + iT_2) - 2i\xi T_1 + \xi^2(T_3 - iT_2)$. A condição obtida na alínea a) é equivalente a

$$\frac{dT}{ds} = [T, T_+],$$

para todo o $\xi \in \mathbb{C}$. Diz-se que T e T_+ definem *um par de Lax* para as equações de Nahm.

Mostre que $d/ds(\mathrm{Tr}T^n) = 0$, para qualquer inteiro positivo n.

<u>Nota</u>: Isto mostra que os valores próprios de T não dependem de s *i.e.* são constantes. Esta é uma propriedade dos pares de Lax em geral. O polinómio característico de T define então uma equação $\det(\eta + T) = \eta^k + a_1(\xi)\eta^{k-1} + \cdots a_k(\xi) = 0$ que é independente de s.

Esta equação polinomial para as duas variáveis comlpexas ξ e η define uma curva algébrica S em $\mathbb{C}^2$. Esta curva designa-se por *curva espectral* do par de Lax.

c) Mostre que se ξ e $\tilde{\xi}$ são coordenadas complexas em P^1, relacionadas por $\xi\tilde{\xi} = 1$ em $P^1 \setminus \{0, \infty\}$, como vimos na aula, então o par de Lax em termos da coordenada $\tilde{\xi}$ se escreve

$$\frac{dT}{ds} = [T, -T_-]$$

com $T_- = iT_1 - \tilde{\xi}(T_3 + iT_2)$. Mostre que se tem $T_+ + T_- = (-1/\xi)T$ e que com $\tilde{\eta} = -\eta/\xi^2$ temos para a curva espectral: $\det(\eta + T) = (1/\xi^{2k})\det(-\tilde{\eta} + \tilde{\xi}^2 T)$.

<u>Nota</u>: Concluímos que a curva espectral está definida naturalmente em TP^1 - tal como a curva espectral das eq. de Bogomolny que foi discutida na aula.

d) Assuma que para ξ genérico T tem um espectro não-degenerado *i.e.* tem espaços próprios de dimensão complexa 1. Então, para cada ponto $(\xi, \eta) \in S \subset TP^1$, temos uma recta complexa dada pelo espaço próprio de $T(s, \xi)$ associado ao valor próprio $-\eta$. Deste modo obtemos um fibrado linha holomorfo - já que T é holomorfo - $L(s)$ sobre S. Seja $g(s, \xi, \eta)$ a função de transição de $L(s)$.

Vamos considerar uma secção σ de $L(s)$. Sobre a carta (ξ, η) podemos definir σ através de uma aplicação $\sigma_+(s, \xi, \eta)$ com valores em $\mathbb{C}$. Analogamente na carta $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ a secção σ é definida por $\sigma_-(s, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ tal que na intersecção das duas cartas temos $\sigma_+ = g\sigma_-$.

Devido às equações acima, podemos escolher σ_+ e σ_- no núcleo de $(d/ds) + T_+$ e $(d/ds) - T_-$ respectivamente, uma vez que estes operadores comutam com T.

Temos então quatro equações para σ_+ e σ_-:

$$\sigma_+ = g\sigma_-; \quad (\eta + T)\sigma_+ = (\eta + T)\sigma_- = 0$$

e

$$\frac{d\sigma_+}{ds} = -T_+\sigma_+; \quad \frac{d\sigma_-}{ds} = T_-\sigma_-.$$

Substitua σ_+ pela sua expressão em termos de g e σ_- e obtenha uma equação *linear* para $g(s, \xi, \eta)$. Obtenha a sua solução geral.

Nota: Acabou de determinar o fibrado $L(s)$ dando a sua função de transição como função de s. Como observou $L(s)$ é determinado por uma equação linear. Consequentemente $L(s)$ determina uma trajéctoria linear no espaço de fibrados linha holomorfos na curva espectral S. Este espaço é a Jacobiana de S e é um toro complexo de dimensão complexa g, onde g é o género de S.

É notável que de um sistema de equações não-lineares se tenha obtido uma equação linear. Diz-se que o sistema original de equações se *linearizou na Jacobiana da curva espectral.* Esta é uma propriedade geral de sistemas integráveis que podem ser formulados em termos de um par de Lax.

É ainda mais notável que haja um isomorfismo entre o espaço de monopólos de carga magnética k - *i.e* soluções das equações de Bogomolny com certas condições fronteira - e o espaço de soluções das equações de Nahm com certas condições fronteira. A este isomorfismo chama-se "transformação de Nahm". Em particular, a curva espectral S que encontrou neste exercício é a mesma curva espectral que viu na aula no contexto das equações de Bogomolny.