Secção de Álgebra e Análise - Departamento de Matemática - IST

Curso de Mestrado em Matemática Aplicada
Tópicos de Topologia - Monopólos e Curvas Algébricas

1ª Série de Problemas - Outubro 1999

Os conceitos e resultados envolvidos nestes problemas são fundamentais na teoria de fibrados e têm aplicações muito gerais em Geometria Diferencial, Topologia e Geometria em geral.

1.1 Seja P um fibrado principal, com grupo de estrutura G, sobre uma variedade M. Mostre que P admite uma secção global, isto é, uma secção definida globalmente em M, se e só se P é isomórfico ao fibrado trivial $M \times G$.

1.2 Seja E um fibrado vectorial real de *rank* n sobre uma variedade M. Mostre que E admite n secções globalmente definidas em M, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, linearmente independentes e tal que $\sigma_j(x) \neq 0, \forall j = 1, ..., n$ e $\forall x \in M$ se e só se E é isomórfico ao fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$.

1.3 Mostre que se G é um grupo de Lie, então o seu fibrado tangente TG é trivial, i.e. um grupo de Lie é sempre *paralelizável*. (Esta é uma maneira de se ver que S^2 *não* tem estrutura de grupo de Lie.)

1.4 Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M e N. Seja P um G-fibrado principal sobre N. Define-se o *pull-back* de P por f, designado por f^*P, como o fibrado principal sobre M cuja fibra em $x \in M$ é a fibra de P em $f(x)$, $P_{f(x)}$. As funções de transição de f^*P são obtidas da maneira natural através do *pull-back* das funções de transição de P:

Se $\{U_i\}$ é uma cobertura de N com P trivializado em cada um dos abertos U_i, e com funções de transição $g_{ij} : U_i \bigcap U_j \longrightarrow G$, então em f^*P consideramos as funções de transição $f^*g_{ij} : f^{-1}(U_i) \bigcap f^{-1}(U_j) \longrightarrow G$, definidas por $f^*g_{ij}(x) = g_{ij}(f(x))$.

a) Sejam $f_0, f_1 : M \longrightarrow N$, duas aplicações diferenciáveis homotópicas entre as variedades M e N. Seja P um G-fibrado principal sobre N. Mostre que os pull-backs de P para M, f_0^*P e f_1^*P são fibrados principais isomórficos.

Nota: As aplicações f_0 e f_1 de $M \longrightarrow N$ dizem-se homotópicas se existir uma função diferenciável $h : M \times I \longrightarrow N$, onde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, tal que $h(x,0) = f_0(x)$ e $h(x,1) = f_1(x)$ para todo o $x \in M$.

Sugestão: Considere o fibrado h^*P sobre $M \times I$. Equipe-o com uma conexão ω. Para construir o isomorfismo entre f_0^*P e f_1^*P, identifique as fibras através do transporte paralelo associado a ω ao longo das curvas $\gamma(t) = (x,t)$ em $M \times I$, com $x \in M$, e $t \in I$.

b) Seja P um fibrado principal, com grupo de estrutura G, sobre uma variedade M. Mostre que se M é contráctil então P é isomórfico ao fibrado trivial $M \times G$.

Nota: Diz-se que uma variedade M é contráctil se for homotópica a um ponto, i.e. se existir uma função contínua $h : M \times [0,1] \to M$ tal que $h(0,x) = x$ e $h(1,x) = x_0, \forall x \in M$, onde x_0 é um ponto de M. Isto implica que todos os grupos de homotopia $\pi_n(M)$ são triviais.

Sugestão: Considere as aplicações de M em M dadas pela identidade e aplicação constante x_0, onde x_0 é um ponto de M. Considere os respectivos *pull-backs* de P. Aplique o resultado da alínea a).

1.5 Seja X uma superfície orientável, suave e compacta. Topologicamente, X é difeomorfa a uma esfera com g buracos, onde se $g = 0$ temos uma esfera, se $g = 1$ temos um toro, etc. A g chama-se o *género* de X. Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo, i.e. tal que $\pi_1(G)$ é trivial.

Mostre que todos os fibrados principais P com grupo de estrutura G sobre X são triviais.

Sugestão:

$i)$ Considere uma triangulação de X, i.e. uma decomposição de X em triângulos colados ao longo das arestas. (Por exemplo, X pode ser cortada ao longo dos ciclos $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}...\ \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$, obtendo-se um polígono com $4g$ lados identificados dois a dois. Uma triangulação de X pode ser obtida triangularizando-se este polígono. Experiemente para um toro! No entanto, não vai necessitar da triangulação explicitamente.)

$ii)$ Trivialize P sobre cada um dos triângulos. (Note que um triângulo é contráctil.)

$iii)$ Mostre que, se $\pi_1(G)$ é trivial, consegue construir uma secção global de P em X, começando por defini-la nos vértices dos triângulos, depois nas arestas, ...

1.6 Seja M uma variedade de dimensão n e TM o seu fibrado tangente. Considere o fibrado dos referenciais em M, $B(M)$, definido por:

$$B(M) = \{(x, e_1, e_2, ..., e_n) : x \in M,\ \{e_i\} \text{ é uma base de } T_xM\}.$$

Mostre que $B(M)$ é um fibrado principal de grupo $GL(n)$. Quais são as funções de transição de $B(M)$?

1.7 Este exercício descreve - mais ou menos no essencial - a construção de Chern-Weil das classes características de um G-fibrado principal P sobre uma variedade M.

Seja P um fibrado de grupo $U(n)$ - o grupo das matrizes complexas $n \times n$ unitárias - sobre M. Seja ω uma conexão em P e Ω a sua curvatura. Estas formas tomam valores na álgebra de Lie $u(n)$ do grupo $U(n)$.

Considere uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M e uma família de secções locais $\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow P$, que em $U_\alpha \bigcap U_\beta$ estão relacionadas por $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)$. Podemos então definir - como vimos na aula - as formas locais de curvatura em cada U_α por $\Omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \Omega$. Em $U_\alpha \bigcap U_\beta$ temos então $\Omega_\beta = Ad_{g_{\alpha\beta}^{-1}}(\Omega_\alpha)$.

a) Mostre que a colecção de formas-2 locais

$$\{\eta_\alpha = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}\,(\Omega_\alpha) \in \Lambda^2(U_\alpha)\},$$

definem uma forma-2 $\eta(\omega)$ <u>globalmente</u> em M.

<u>Nota</u>: Tr designa a operação de tomar o traço de uma matriz em $u(n)$.

b) Mostre que a forma $\eta(\omega)$ é fechada, i.e. $d\eta(\omega) = 0$.

<u>Sugestão</u>: Use a definição de Ω em termos de ω e recorde que o Tr de um comutador de matrizes é zero.

<u>Nota 1</u>: O factor de $i/2\pi$ faz com que $\eta(\omega)$ seja uma forma real, uma vez que $u(n)$ é constituída por matrizes anti-hermiteanas $n \times n$.

<u>Nota 2</u>: Concluímos que $\eta(\omega)$ define uma classe de cohomologia $[\eta(\omega)] \in H^2(M, \mathbb{R})$.

c) Mostre que $[\eta(\omega)] \in H^2(M, \mathbb{R})$ é <u>independente da conexão ω</u> que escolhemos em P.

Obtemos assim uma classe de cohomologia $c_1(P) \in H^2(M, \mathbb{R})$ que só depende do fibrado P, chamada a *primeira classe de Chern de P*. Fibrados isomórficos têm a mesma classe de Chern.

<u>Sugestão</u>:

i) Seja ω' qualquer outra conexão em P e considere a forma-1 com valores na álgebra de Lie $\rho = \omega' - \omega$. Mostre então que $\eta(\omega') - \eta(\omega)$ é uma forma-2 exacta em M, pelo que a classe $[\eta(\omega)] = [\eta(\omega')]$ em $H^2(M, \mathbb{R})$.

Nota: Esta construção pode ser generalizada tomando-se em vez de Tr um qualquer polinómio, f, Ad-invariante em $u(n)$. Então as formas $f(\Omega_\alpha)$ definem uma forma-2k, se f fôr um polinómio homogéneo de grau k, fechada em M.

Os polinómios Ad-invariantes na álgebra de Lie são gerados pelos coeficientes do polinómio característico

$$\det(A+\lambda I)=\sum_{k=0}^{n} s_k(A)\lambda^{n-k}.$$

Definem-se então as classes de Chern

$$c_k(P)=[(\frac{i}{2\pi})^k s_k(\Omega)]\in H^{2k}(M,\mathbb{R}),\quad k=1,...,n$$

que não dependem da escolha de conexão ω em P e que o caracterizam topologicamente. Esta construção chama-se construção de Chern-Weil.

1.8 Considere o fibrado principal $P=S^3$ de base S^2 e grupo $U(1)=S^1$ - o fibrado de Hopf apresentado na primeira aula - cuja construção se recorda a seguir.

Calcule o *número de Chern* deste fibrado de Hopf definido por

$$\int_{S^2} c_1(P).$$

Sugestão:

i) Recorde como P é definido:

$$P=S^3=\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2:|z_0|^2+|z_1|^2=1\},$$

e $e^{i\theta}\in S^1$ actua em P por $(z_0,z_1)e^{i\theta}=(e^{i\theta}z_0,e^{i\theta}z_1)$.

ii) Considere a seguinte decomposição de P: $P_+=\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2:z_0\neq 0\}$ e $P_-=\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2:z_1\neq 0\}$, com $P=P_+\bigcup P_-$. Considere agora as classes de equivalência pela acção de S^1, $U_\pm=P_\pm/S^1$:

Em P_+: $[(z_0,z_1)]=z_1/z_0=z\in U_+\sim\mathbb{C}$, com $P_+\sim U_+\times S^1$. Em P_-: $[(z_0,z_1)]=z_0/z_1=w\in U_-\sim\mathbb{C}$, com $P_-\sim U_-\times S^1$.

iii) Mostre que as identificações em $P_+\bigcap P_-$ são:

$(z,e^{i\alpha})\equiv(w,e^{i\beta})$ sse $z=1/w$ e $\alpha=\beta-\arg z$.

iv) Conclua que a função de transição associada a estas trivializações de P é dada por $g:U_+\bigcap U_-\longrightarrow S^1$ com $g(z)=\exp(i\arg z)$ para $z\neq 0$.

v) Seja $z=x+iy=r\exp(i\theta)\in U_+$ e $w=s+it=\tilde{r}\exp(-i\theta)\in U_-$. Mostre que

$$\omega_+=\frac{i}{2}(\frac{1-r^2}{1+r^2}-1)d\theta\quad\text{e}\quad\omega_-=\frac{i}{2}(\frac{\tilde{r}^2-1}{1+\tilde{r}^2}+1)d\theta,$$

definem formas locais de uma conexão em P, em U_+ e U_- respectivamente.

vi) Calcule $\Omega(\omega)$ e use-a de acordo com o exercício anterior para calcular $c_1(P)$.

Nota: Como observou o número de Chern é um inteiro. De facto, as classes de Chern definidas no exercício anterior são inteiras $c_k(P) \in H^{2k}(M, \mathbb{Z})$.

1.9 Considere um G-fibrado principal P sobre a esfera S^n. Decomponha a esfera S^n em dois hemisférios Norte e Sul. Cada um hemisférios é difeomórfico a um disco D^n que é contráctil. Assim temos dois discos D_+ e D_- e podemos trivializar P sobre cada um deles. Estas duas trivializações são coladas ao longo do equador de S^n, que é S^{n-1}, através de uma função de transição $g : S^{n-1} \longrightarrow G$.

a) Sejam P_0 e P_1 dois G-fibrados principais sobre S^n, definidos respectivamente pelas funções de transição $g_0 : S^{n-1} \longrightarrow G$ e $g_1 : S^{n-1} \longrightarrow G$, através da construção anterior.

Mostre que P_0 e P_1 são isomórficos se e só se g_0 e g_1 são aplicações homotópicas, i.e. $[g_0] = [g_1]$ em $\pi_{n-1}(G)$.

Sugestão: Seja $h : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow G$, uma homotopia entre g_0 e g_1, i.e. $h(x,0) = g_0(x)$ e $h(x,1) = g_1(x)$.

P_0 e P_1 são isomórficos sse existirem funções $f_+ : D_+ \longrightarrow G$ e $f_- : D_- \longrightarrow G$ tais que $f_+ g_0 f_-^{-1} = g_1$ ao longo de $D_+ \bigcap D_- \sim S^{n-1}$.

Ora, a função $g_1 g_0^{-1}$ é homotópica à função constante em S^{n-1} cujo valor é a identidade $e \in G$. Logo, esta função pode prolongar-se diferencialvelmente ao interior de D_+ usando uma homotopia ...

b) Considere o grupo $SO(n)$ das matrizes $n \times n$ reais, ortogonais e de determinante igual a um. Considere a esfera S^2. Usando o facto de $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ se $n \geq 3$, mostre que existem dois fibrados principais não equivalentes de grupo $SO(n)$, $n \geq 3$, sobre S^2.

Nota: Neste problema onde está S^2 poderia pôr-se uma superfície orientável, suave e compacta X: Uma tal superfície de género g, pode ser cortada ao longo dos ciclos $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} ... \, \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$, obtendo-se uma metade homotópica a um disco D e uma outra metade, chamemos-lhe B, que é homotópica a $2g$ cópias de S^1 todas unidas por um ponto. Podemos sempre trivializar um fibrado - ver a ideia no problema 5 - sobre D e B. Estas duas trivializações têm de ser coladas ao longo da fronteira comum de D e B que é S^1, tal como no caso em que X é uma esfera S^2. Consequentemente, é também o $\pi_1(G)$ que determina os diferentes tipos topológicos de fibrados sobre uma superfície de Riemann X, com grupo de estrutura G.