Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Topologia Diferencial - 2º semestre de 2004/05

FICHA DE TRABALHO 1

1) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade e TM o seu fibrado tangente. O fibrado de esferas unitárias de M, $SM \subset TM$, é definido por

$$SM = \{(p, v) \in TM : |v| = 1\}.$$

Mostre que SM é uma variedade.

2) *Teorema da Pilha de Discos.* Seja $f : X \to Y$, com X compacta e $\dim X = \dim Y$. Seja $q \in Y$ um valor regular de f. Mostre que se tem $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ e que existe uma vizinhança aberta $V \ni q$ e vizinhanças abertas disjuntas $U_j \ni p_j, j = 1, \ldots, k$, tal que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$, sendo $f : U_j \to V, j = 1, \ldots, k$ difeomorfismos.

Conclua que a função $\sharp f : Y \to \mathbb{N}_0$, com $\sharp f(q) =$ cardinal de $f^{-1}(q)$, é localmente constante no sub-conjunto de Y dado pelos valores regulares de f.

3) Seja $P(z)$ um polinómio não constante na variável complexa $z \in \mathbb{C}$. P define uma aplicação diferenciável $P : S^2 \to S^2$, onde $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. (Em $\infty \in S^2$ toma-se a coordenada complexa local $w = 1/z$ e define-se $P(\infty) = \infty$.)

Demonstre o *Teorema Fundamental da Álgebra*: P tem um zero.

(Sugestão: Mostre que P é sobrejectiva. Utilize o exercício anterior e o facto de P' não ser identicamente zero.)

4) Seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ complexas e considere o subconjunto das matrizes unitárias

$$U(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : \bar{M}^t \cdot M = I_n\}.$$

Mostre que o grupo $U(n)$ é uma variedade.

5) Mostre que qualquer subconjunto fechado $C \subset M$ de uma variedade M é o conjunto de zeros de uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$.

(Sugestão: O resultado é válido quando $M = \mathbb{R}^m$.)

6) Considere $S^1 \hookrightarrow S^2$, onde S^1 é enviada para o equador. Identificando pontos anti-podais, obtemos $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Mostre que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ não pode ser obtido como conjunto de nível *regular* de uma função de classe C^1 em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

7) Seja $f : M \to N$ uma submersão. Mostre que, localmente, f é da forma $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, onde $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_n)$.

8) Mostre que qualquer conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^n$, pode ser obtido como intersecção da subvariedade $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com outra variedade $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Em que situações é que esta intersecção é transversal ?

9) *Teorema da fibração de Ehresmann.* Seja $\pi : E \to B$ uma submersão própria. Mostre que π é uma fibração localmente trivial: $\forall p \in B$, $\exists$ uma vizinhança $U \ni p$ em B e um difeomorfismo $\phi : U \times \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(U)$, tal que $\pi(\phi(u, v)) = u$, para $(u, v) \in U \times \pi^{-1}(p)$.

   (Sugestão: Como o problema é local, podemos tomar $B = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Utilize o resultado do problema 7) e uma partição de unidade para mostrar que existem campos vectoriais $X_j, j = 1, \ldots, n$, em E, tal que $D\pi(X_j) = \partial_j$. Seja φ^j_t o fluxo de X_j. Defina $\phi(u, v) = \varphi^1_{u_1} \circ \cdots \circ \varphi^n_{u_n}(v)$.)

10) Dê um contra-exemplo ao teorema do problema 9), no caso de π não ser própria.