Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Topologia Diferencial - 2º semestre de 2004/05

Teste 1 (Recuperação) - 21 de Junho de 2005 - 10h
Duração: 90 minutos

(30) 1) Seja X uma variedade complexa, com $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. A orientação natural de X é definida da seguinte forma: sejam $\{z_j = x_j + iy_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ coordenadas locais complexas em $p \in X$, com x_j, y_j coordenadas reais; orientamos T_pX com a base $\{\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{x_2}, \partial_{y_2}, \ldots, \partial_{x_n}, \partial_{y_n}\}$. (Verifica-se facilmente que esta orientação é preservada por mudanças de coordenadas holomorfas.)

Sejam A, B sub-variedades complexas compactas de X, com $\dim_{\mathbb{C}} A = k$, $\dim_{\mathbb{C}} B = n - k$ e $A \pitchfork B$. Mostre que se A e B estão orientadas de forma natural então $\#(A, B) = \#(A \cap B)$.

(30) 2) Mostre que qualquer aplicação $f : S^n \to S^n$ com $\deg f \neq (-1)^{n+1}$ tem um ponto fixo.

(40) 3) Sejam A, M, N variedades. Considere-se uma família de aplicações parametrizada por A, $F_a : M \to N$, $a \in A$, tal que $F : A \times M \to N$ é de classe C^∞.

a) Mostre que a aplicação induzida $\hat{F} : A \to C^\infty_W(M, N)$ é contínua.

b) Mostre que a aplicação induzida $\hat{F} : A \to C^\infty_S(M, N)$ é contínua sse $\exists\, K \subset M$, K compacto, tal que a restrição $\hat{F} : A \to C^\infty(M \setminus K, N)$ é constante.