Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2008/09

2º Teste de Rec. - 07/01/08 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja S o parabolóide

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\},$$

equipado com a métrica Riemanniana induzida pela métrica Euclideana em $\mathbb{R}^3$. Considere a parametrização de S dada por $h(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)$, $\rho \in]0, +\infty[$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

(3 v) a) Mostre que a métrica em S é dada por

$$g(\rho, \theta) = (1 + 4\rho^2)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2.$$

(3 v) b) Considere o referencial ortonormado $X_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}\frac{\partial}{\partial\rho}, X_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}$. Mostre que as formas da conexão de Levi-Civita de g relativamente a este referencial são dadas por

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}\, d\theta = -\omega_2^1, \;\; \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0.$$

(3 v) c) Determine a curvatura de Gauss de S.

(4 v) d) Determine o vector obtido por transporte paralelo do vector $\frac{\partial}{\partial\theta}$ ao longo da curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1), t \in [0, 2\pi]$.

(3 v) e) Seja $\alpha(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t, t^2)$. Mostre que $\alpha(t)$ é a imagem de uma geodésica.

VSFF

(4 v) 2) Seja M uma variedade equipada com uma conexão afim ∇. Para $X \in \mathcal{X}(M)$ e $\gamma(t)$ uma curva integral de X, com $\gamma(0) = p$, seja

$$P_{\gamma,t} : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$$

o operador de transporte paralelo ao longo de γ.

Mostre que, $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt}_{|t=0} P_{\gamma,t}^{-1}(Y(\gamma(t))).$$

Ou seja, a operação de transporte paralelo determina univocamente a conexão.

Sugestão: Considere uma vizinhança de coordenadas em p e

i) Considere uma curva $v(s)$ em T_pM, com $v(0) = Y_p$. Calcule

$$\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} P_{\gamma,t}(v(s)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} P_{\gamma,t}(v(s)).$$

ii) Calcule

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} P_{\gamma,t}(v(t)).$$

iii) Considere que $P_{\gamma,t}(v(t)) = Y(\gamma(t))$ e tome a expansão de Taylor de ordem 1 de $Y(\gamma(t))$ em torno de $t = 0$.

Formulário

- Equações de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$:

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_i^j = -\omega_j^i \\ d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{cases}$$

- $\nabla_X(X_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k(X) X_k$.
- $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^k}$.