Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2007/08

Teste de Rec. 2 - 08/01/08 (10h) - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1$ e equipada com a métrica Riemanniana induzida pela métrica standard em $\mathbb{R}^3$.

(2 v) a) Considere a parametrização de S,

$$h(\theta,\phi) = ((2+\cos\phi)\cos\theta, (2+\cos\phi)\sin\theta, \sin\phi), \quad (\theta,\phi) \in]0,2\pi[\times]0,2\pi[.$$

Mostre que métrica em S é dada por

$$g = (2+\cos\phi)^2\, d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi.$$

(2 v) b) Considere o referencial móvel ortonormado, $\{X_1, X_2\}$, dado por $X_1 = \frac{1}{2+\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}, X_2 = \frac{\partial}{\partial\phi}$. Mostre que as formas da conexão de Levi-Civita neste referencial são,

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \sin\phi\, d\theta, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0.$$

(2 v) c) Determine a curvatura de Gauss, K, de S.

(2 v) d) Calcule $\int_S K$.

(2 v) e) Indique, justificando, se a curva fechada $z = 1$ é imagem de uma geodésica de S.

(2 v) f) Determine, justificando, uma isometria não trivial de S.

(2 v) g) Considere o quadrado $Q =]0,2\pi[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$, equipado com a métrica induzida pela métrica standard de $\mathbb{R}^2$. Determine, justificando, se $h : Q \to S$ é uma isometria.

(2 v) h) Seja $X = (-1,1,0) \in T_{(0,2,1)}S$. Determine o vector obtido por transporte paralelo de X ao longo da curva fechada $z = 1$ entre o ponto $(0,2,1)$ e o ponto $(0,-2,1)$.

VSFF

(4 v) 2) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e seja $X \in \mathcal{X}(M)$.

a) Defina a derivada de Lie de g, $L_X g$, de forma apropriada.

b) Mostre que $L_X g = 0$ (ou seja, X é um *campo de Killing*) sse $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \forall Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

c) Mostre que $L_X g = 0$ sse o fluxo de X define um grupo a um parâmetro de isometrias de M.

d) Mostre que um campo de Killing não nulo em S^2 tem exactamente dois zeros.

Formulário

- Equações de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$:

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_i^j = -\omega_j^i \\ d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{cases}$$

- $\nabla_X(X_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k(X) X_k$.