Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2013/14

Teste Recuperação 1 - 31/01/2014 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Para $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, sejam $A_f, B_g \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ os seguintes campos vectoriais em $\mathbb{R}^2$:

$$A_f(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x},\ B_g = g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

(3 v) a) Mostre que $[A_f, B_g] = B_{f\frac{\partial g}{\partial x}} - A_{g\frac{\partial f}{\partial y}}$.

(3.5 v) b) Determine os fluxos de $A_{y^2} + B_2$ e de $A_x + B_y$.

(3.5 v) c) Seja ϕ_t o fluxo de $A_x + B_y$. Determine

$$\left(D\phi_1 \cdot A_f\right)_{|_{(x,y)}}.$$

VSFF

2) Seja G um grupo de Lie compacto que actua na variedade compacta M. Para $g \in G$, seja $\phi_g : M \to M$ o difeomorfismo correspondente. Uma forma-k, $\eta \in \Omega^k(M)$, diz-se G-invariante se

$$\phi_g^* \eta = \eta, \ \forall g \in G.$$

Seja $\Omega^k_G(M) \subset \Omega^k(M)$ o sub-espaço das formas-k G-invariantes.

(3 v) a) Mostre que $d : \Omega^k_G(M) \to \Omega^{k+1}_G(M)$.

(3 v) b) Sejam

$$Z^k_G(M) = \{\eta \in \Omega^k_G(M) : d\eta = 0\},$$
$$B^k_G(M) = \{\alpha \in \Omega^k_G : \alpha = d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}_G\}.$$

Definem-se os *grupos de cohomologia de de Rham invariantes* como $H^k_G(M) = Z^k_G(M)/B^k_G(M)$.

Mostre que a inclusão $\Omega^k_G(M) \subset \Omega^k(M)$ define uma aplicação linear

$$\iota : H^k_G(M) \to H^k(M).$$

(2 v) c) Seja $P : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ definida por

$$P(\eta) = \int_G \phi_g^* \eta \ \Omega(g),$$

onde Ω é o elemento de volume Riemanniano de uma métrica invariante à esquerda e à direita em G, com volume unitário.

Mostre que a imagem de P está contida em $\Omega^k_G(M)$ e que

$$P_{|_{\Omega^k_G(M)}} = id_{\Omega^k_G(M)}.$$

(2 v) d) Mostre que $P \circ d = d \circ P$ e que a aplicação ι da alínea $b)$ é injectiva.