Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2008/09

1º Teste de Rec. - 07/01/09 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere os fluxos em $\mathbb{R}^3$ dados por $\phi_t(x,y,z) = (e^t x, e^t y, e^t z)$ e $\varphi_t(x,y,z) = (\cos t\, x - \sin t\, y, \sin t\, x + \cos t\, y, e^t z)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3 v) a) Determine $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ tal que ϕ_t é o fluxo de X.

(3.5 v) b) Mostre que

$$D\varphi_t(X_p) = X(\varphi_t(p)).$$

(3.5 v) c) Calcule $[X,Y]$, onde $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ é o campo vectorial com fluxo φ_t.

(3 v) 2) Seja G um grupo de Lie e $X \in \mathcal{X}_L(G)$. Seja $g \in G$ qualquer e seja L_g a translacção à esquerda por g. Mostre que $\forall f \in C^\infty(G)$ se tem $X \cdot (f \circ L_g) = (X \cdot f) \circ L_g \in C^\infty(G)$.

(3 v) 3) Sejam G, H grupos de Lie. Se $A \in T_eG$, seja $X^A \in \mathcal{X}_L(G)$ o campo vectorial invariante à esquerda em G tal que $(X^A)_e = A$. (Do mesmo modo para $B \in T_eH$ e $X^B \in \mathcal{X}_L(H)$.)

Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, injectivo e de classe C^∞. Mostre que sobre $\phi(G)$

$$X^{(D\phi_e A)} = D\phi X^A.$$

(4 v) 4) Seja M uma variedade compacta orientada, com $\dim M = n+1$, e seja $\partial M \neq \emptyset$ o seu bordo. Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $X_{|\partial M}$ é tangente a ∂M. Seja $\omega \in \Omega^n(M)$. Mostre que a forma-n $d(\mathcal{L}_X\omega)$ tem um zero em M.

(Recorde que $\mathcal{L}_X\omega = d \circ \iota_X\, \omega + \iota_X \circ d\, \omega$.)