Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2013/14

Teste 2 - 15/01/14 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja $\epsilon > 0$ e $I_\epsilon =]-\epsilon, \epsilon[$. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada localmente por

$$\phi(t,s) = \gamma(t) + sv(t),$$

$t \in I_\epsilon, s \in \mathbb{R}$, $\gamma : I_\epsilon \to \mathbb{R}^3, v : I_\epsilon \to \mathbb{R}^3$.

S diz-se uma superfície *regrada* porque é gerada por rectas. (No ponto $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ passa linha recta gerada pelo vector $v(t) \in \mathbb{R}^3$ que está contida em S.) Podemos assumir que

$$||\dot{\gamma}(t)|| = ||v(t)|| = 1, \ \langle \dot{\gamma}(t), v(t) \rangle = 0.$$

Sejam $a(t) = \langle \dot{v}(t), \dot{v}(t) \rangle, \ b(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{v}(t) \rangle$.

Considere-se em S a métrica induzida pela métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^3$.

(3 v) a) Mostre que a métrica em S é dada por

$$g = A(t,s)dt^2 + ds^2,$$

onde $A(t,s) > 0$ é dado por

$$A(t,s) = 1 + s^2 a(t) + 2sb(t).$$

(3 v) b) Considere o referencial móvel ortonormado

$$X_1 = A(t,s)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t}, \ X_2 = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Mostre que as formas da conexão de Levi-Civita respectivas são

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = -A(t,s)^{-\frac{1}{2}} (sa(t) + b(t))\, dt, \ \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0.$$

(4 v) c) Determine a curvatura de Gauss de S e verifique que não é positiva em nenhum ponto.

(3 v) d) Serão as rectas $\alpha_{t_0}(s) = \phi(t_0, s), s \in \mathbb{R}$, com $t_0 \in I_\epsilon$ constante, geodésicas em S ?

(3 v) e) Mostre que a curva $\gamma(t)$ é uma geodésica sse $b(t) = 0$.

(4 v) 2) Seja S uma superfície compacta e orientável equipada com uma métrica Riemanniana com curvatura de Gauss constante e negativa. Seja $C \subset S$ uma geodésica sem auto-intersecções que separa S em duas superfícies com bordo S_1, S_2, ou seja,

$$S = S_1 \cup S_2, \;\; \partial S_1 = \partial S_2 = C.$$

Mostre que

$$\frac{\text{Área}(S_1)}{\text{Área}(S_2)} \in \mathbb{Q}.$$

Formulário

- Equações de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$:

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_i^j = -\omega_j^i \\ d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{cases}$$

- $\nabla_X(X_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k(X) X_k$.