Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2008/09

Teste 2 - 20/12/08 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Considere a métrica em $\mathbb{R}^2$ definida em coordenadas cartesianas por

$$g(x,y) = e^{2\phi}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Considere o referencial móvel ortornormado $X_1 = e^{-\phi}\frac{\partial}{\partial x}, X_2 = e^{-\phi}\frac{\partial}{\partial y}$.

(4 v) a) Mostre que relativamente ao referencial $\{X_1, X_2\}$ as formas da conexão de Levi-Civita de g são dadas por

$$\omega_1^2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}dx + \frac{\partial\phi}{\partial x}dy = -\omega_2^1, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0.$$

(4 v) b) Determine a curvatura de Gauss de g. Verifique que g tem curvatura constante sse ϕ satisfaz a equação de Liouville,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\alpha e^{2\phi},$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4 v) c) Seja $\gamma(t)$ uma curva integral do campo vectorial $(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})$. Mostre que o campo vectorial $v(t) = e^{-\phi}a, a \in \mathbb{R}^2$, é transportado paralelamente ao longo de γ.

(2 v) d) Assuma que a curvatura de Gauss de g é negativa. Mostre que não existem geodésicas fechadas que não se auto-intersectem.

(2 v) e) Assuma que a curvatura de Gauss de g nunca se anula. Será possível construir um triângulo geodésico formado por linhas rectas ?

2) Seja G um grupo finito que actua livremente numa variedade compacta M.

(2 v) a) Mostre que M tem uma métrica Riemanniana tal que G actua em M por isometrias.

(2 v) b) Suponha que $\dim M = 2$ e que M é orientável. Mostre que $\chi(M/G) = \chi(M)/|G|$.

Formulário →

Formulário

- Equações de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$:

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_i^j = -\omega_j^i \\ d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{cases}$$

- $\nabla_X(X_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k(X) X_k$.

BOM NATAL E FELIZ ANO NOVO!