Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2007/08

Teste 2 - 17/12/2007 (10h) Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere a superfície $E \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e equipada com a métrica Riemanniana induzida pela métrica standard em $\mathbb{R}^3$.

(2 v) a) Considere a parametrização de E,

$$h(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, 2\cos\phi), \quad (\theta, \phi) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[.$$

Mostre que a métrica em E é dada por

$$g = \sin^2\phi \, d\theta \otimes d\theta + (1 + 3\sin^2\phi) \, d\phi \otimes d\phi.$$

(2 v) b) Considere o referencial móvel ortonormado $\{X_1, X_2\}$ dado por $X_1 = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}, X_2 = \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\phi}}\frac{\partial}{\partial\phi}$. Mostre que as formas da conexão de Levi-Civita neste referencial são,

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = -\frac{\cos\phi}{\sqrt{1+3\sin^2\phi}} \, d\theta, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0.$$

(2 v) c) Mostre que as formas de curvatura neste referencial são,

$$\Omega_1^2 = -\Omega_2^1 = -\frac{4\sin\phi}{(1+3\sin^2\phi)^{3/2}} \, d\theta \wedge d\phi, \ \ \Omega_1^1 = \Omega_2^2 = 0.$$

(2 v) d) Determine a curvatura de Gauss de E.

(2.5 v) e) Mostre que os meridianos de E (curvas com $\theta =$ const.) são imagens de geodésicas.

(2.5 v) f) Calcule o ângulo pelo qual o vector $\frac{\partial}{\partial\phi}_{|(0,1,0)}$ transportado paralelamente ao longo do equador de E, $z = 0$, é rodado ao voltar ao ponto inicial.

(3 v) g) Considere o difeomorfismo $f : E \to S^2$, $f(x, y, z) = (x, y, z/2)$, onde $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ está equipada com a métrica standard. Determine, justificando, se f é uma isometria.

(4 v) 2) Seja S uma variedade-2 Riemanniana, compacta e orientável, cujo bordo é constituído por k circunferências geodésicas disjuntas, com $k \geq 3$. Mostre que existe um ponto em S com curvatura de Gauss negativa.

Formulário →

Formulário

- Equações de Cartan num referencial móvel ortonormado $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$:

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_i^j = -\omega_j^i \\ d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{cases}$$

- $\nabla_X(X_i) = \sum_{k=1}^n \omega_i^k(X) X_k.$

BOM NATAL E FELIZ ANO NOVO!