Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2013/14

Teste 1 - 13/11/2013 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Considere os campos vectoriais $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ definidos por

$$X(x,y,z) = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y(x,y,z) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Sejam ψ_t e ϕ_t os fluxos de X e de Y respectivamente.

(3 v) a) Determine os fluxos ψ_t e ϕ_t.

(3 v) b) Calcule $[X, Y]$.

(3.5 v) c) Determine $D\phi_{\frac{\pi}{2}} X$.

(3.5 v) d) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(s,t) = \phi_s \circ \psi_t(1,1,1).$$

Determine se f é uma imersão e se é um mergulho.

(3 v) 2) Seja M uma variedade diferencial com acção de um grupo de Lie G dada por $\varphi : G \times M \to M$. Para $p \in M$, seja $\varphi_p : G \to M$ a aplicação

$$\varphi_p(g) = g \cdot p = \varphi(g,p).$$

Para $A \in \mathcal{X}_L(G)$, seja $X^A \in \mathcal{X}(M)$ o campo vectorial definido por

$$X^A(p) = D\varphi_p(e) \cdot A(e), \;\; p \in M.$$

Mostre que X^A é um campo completo.

VSFF

3) Seja M uma variedade-n compacta e orientada. Considere as inclusões

$$\begin{array}{rcl} i_0 : M & \hookrightarrow & M \times [0,1] \\ p & \mapsto & (p,0) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} i_1 : M & \hookrightarrow & M \times [0,1] \\ p & \mapsto & (p,1). \end{array} .$$

(2 v) a) Seja $\omega \in \Omega^n(M \times [0,1])$ tal que $i_0^*\omega = i_1^*\omega$. Mostre que $d\omega$ tem um zero em $M \times [0,1]$.

(2 v) b) Seja X um campo vectorial em $M \times [0,1]$ tal que

$$\int_{M\times[0,1]} \mathcal{L}_X \eta = 0, \ \ \forall \eta \in \Omega^{n+1}(M \times [0,1]).$$

Determine qual a condição mais geral que X tem de satisfazer para ter esta propriedade.

(Nota: Recorde a fórmula de Cartan para a derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_X \eta = d(\iota_X \eta) + \iota_X(d\eta),$$

onde $\iota_X \eta(Y_1, \ldots, Y_n) = \eta(X, Y_1, \ldots, Y_n)$.)