Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2008/09

Teste 1 - 22/11/2008 - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $\phi(x, y, z) = (x + y^2, y + z, z)$. Seja

$$X(x, y, z) = -y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3).$$

(3 v) a) Determine se ϕ é ou não um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(3 v) b) Mostre que

$$(D\phi X)_{|(x,y,z)} = (y - z)\frac{\partial}{\partial x} + (z + 1)\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

(3 v) c) Calcule $[X, D\phi X]$.

(3 v) 2) Seja $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n), X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que

$$d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]).$$

3) Seja G um grupo de Lie. A sua *forma de Maurer-Cartan*, η, é definida por

$$\begin{array}{rccl} \eta_g & : & T_gG & \to & T_eG, \\ & & X_g & \mapsto & DL_{g^{-1}}X_g, \quad \forall g \in G. \end{array}$$

Note que η é uma forma-1 com valores no espaço linear T_eG, com $\eta(X)(g) = \eta_g(X_g), \forall X \in \mathcal{X}(G), g \in G$.

(2 v) a) Verifique que se $X \in \mathcal{X}_L(G)$ então $\eta(X)(g) = X_e, \forall g \in G$.

(2 v) b) Sejam $X, Y \in \mathcal{X}_L(G)$. Utilize o problema 2) para mostrar que $d\eta(X, Y) + [\eta(X), \eta(Y)] = 0$.

(2 v) c) Mostre a equação de Maurer-Cartan:

$$d\eta(X, Y) + [\eta(X), \eta(Y)] = 0, \ \forall X, Y \in \mathcal{X}(G).$$

(2 v) 4) Sejam M, N variedades orientadas de dimensão m e n respectivamente. Considere as projecções naturais $p_M : M \times N \to M$ e $p_N : M \times N \to N$. Sejam $\omega \in \Omega^m(M)$ e $\eta \in \Omega^n(N)$. Mostre que

$$\int_{M\times N} p_M^*\omega \wedge p_N^*\eta = \left(\int_M \omega\right) \cdot \left(\int_N \eta\right),$$

onde a orientação em $M \times N$ é a induzida de M e N da forma natural.