Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana - 1º semestre de 2007/08

Teste 1 - 10/11/2007 - 9h - Duração: 90 min.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1) Recorde o grupo de Lie de dimensão 3,

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ ad - bc = 1 \right\}.$$

Considere a acção natural de $SL_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $g \cdot (x,y) = (ax+by, cx+dy)$, $g \in SL_2(\mathbb{R})$. Considere ainda os três subgrupos a 1 parâmetro seguintes, com $t \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(t) = \exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \ \beta(t) = \exp\left(t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\gamma(t) = \exp\left(t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

(2 v) a) Determine $Dg(x,y)$ (onde $g(x,y) = g \cdot (x,y)$).

(3 v) b) Mostre que os campos vectoriais em $\mathbb{R}^2$,
$X_\alpha(x,y) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \alpha(t) \cdot (x,y)$, $X_\beta(x,y) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta(t) \cdot (x,y)$
e $X_\gamma(x,y) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma(t) \cdot (x,y)$, são dados por

$$X_\alpha = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \ X_\beta = y\frac{\partial}{\partial x}, \ X_\gamma = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

(3 v) c) Determine o fluxo de $X_\beta - X_\gamma$.

(3 v) d) Mostre que

$$[X_\alpha, X_\beta] = -2X_\beta, \ [X_\alpha, X_\gamma] = 2X_\gamma, \ [X_\beta, X_\gamma] = -X_\alpha.$$

(2 v) e) Mostre que a acção fornece um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : LieSL_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$.

VSFF

(3 v) 2) Seja G um grupo de Lie. Se $g \in G$, a translação à direita por g é definida por $R_g(h) = hg$. Um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ diz-se invariante à direita se $DR_g X = X, \forall g \in G$. Seja X um campo invariante à direita e seja $Y \in \mathcal{X}_L(G)$. Mostre que $[X, Y] = 0$.

3) Seja N uma variedade-n orientada, compacta, com $\partial N = \emptyset$. Seja $i : M \hookrightarrow N$ uma subvariedade-m orientada, compacta, com $\partial M = \emptyset$. Suponha que $\exists\, \omega_M \in \Omega^{n-m}(N)$ tal que $\forall \omega \in \Omega^m(N)$ se tem

$$\int_M i^*\omega = \int_N \omega \wedge \omega_M.$$

(2 v) a) Mostre que $d\omega_M = 0$.

(2 v) b) Seja $j : A \hookrightarrow N$ uma subvariedade-$(m+1)$ orientada, com $j(\partial A) = i(M)$ (como variedades orientadas).
Suponha que $\exists\, \omega_A \in \Omega^{n-m-1}(N)$ tal que $\forall \eta \in \Omega^{m+1}(N)$ se tem

$$\int_A j^*\eta = \int_N \eta \wedge \omega_A.$$

Mostre que $d\omega_A = (-1)^{m+1}\omega_M$.