Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. João Pimentel Nunes

Programa Aproximado Aula a Aula

I. Topologia e Continuidade de Funções em $\mathbb{R}^n$

1. Regras de funcionamento da cadeira. Introdução à análise em $\mathbb{R}^n$. Exemplos de campos escalares e vectoriais. Norma e distância. Bolas abertas em $\mathbb{R}^n$.

2. Pontos interiores, exteriores e fronteiros de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ abertos e fechados. Exemplos. Sucessões em $\mathbb{R}^n$. Convergência de sucessões em $\mathbb{R}^n$. Exemplos. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Exemplo.

3. Propriedades de sucessões em conjuntos fechados. Conjuntos compactos. Propriedades de sucessões em conjuntos compactos. Continuidade de funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e com valores em $\mathbb{R}^m$. Exemplos.

4. Limites dos valores de uma função num ponto interior ou fronteiro ao seu domínio. Relação com a continuidade. Exemplos. Limites direccionais. Exemplos.

5. Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$ e aplicação ao cálculo de limites. Exemplos. Teorema de Weierstrass. Exemplos de introdução ao teorema do valor médio.

6. Conjuntos separados e conjuntos conexos. Teorema do valor médio. Exemplo.

II. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

7. Diferenciabilidade de funções definidas em $\mathbb{R}^n$. Exemplo. Derivadas direccionais. Exemplos. Derivadas parciais. Exemplos.

8. Derivadas direccionais de funções diferenciáveis. Matriz Jacobiana. Exemplos.

9. Condição suficiente de diferenciabilidade. Exemplos. Gradiente de um campo escalar e algumas propriedades. Exemplos.

10. Regra de derivação da função composta. Exemplos.

11. Continuação. Teorema de Lagrange para campos escalares em $\mathbb{R}^n$.

12. Conjntos de nível de campos escalares em $\mathbb{R}^n$. Exemplos. Caminhos em $\mathbb{R}^n$ e vectores tangentes a caminhos. Exemplos. Relação de perpendicularidade entre o gradiente e os conjuntos de nível. Rectas normais e planos tangentes a superfícies de nível em $\mathbb{R}^3$. Exemplos. Potencial gravítico de Newton.

III. Fórmula de Taylor e Extremos

13. Derivadas parciais de ordem superior. Teorema de Schwarz. Exemplos.

14. Fórmula de Taylor para campos escalares em $\mathbb{R}^n$. Exemplos.

15. Extremos de campos escalares em $\mathbb{R}^n$. Condição necessária para um ponto ser extremo de um campo escalar diferenciável. Pontos críticos. Pontos em sela. Exemplos. Matriz Hessiana.

16. Condições necessárias e suficientes (de segunda ordem) para que um ponto crítico seja um máximo ou mínimo local, ou um ponto em sela. Exemplos.

17. Revisões e exemplos.

IV. Integrais Múltiplos

27. Introdução. Intervalos em $\mathbb{R}^n$. Funções em escada e integrais de funções em escada.

28. Integral de Riemann de uma função limitada num intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$. Teorema de Fubini.

29. Teorema de Fubini. Exemplos.

30. Exemplos.

31. Integrabilidade das funções limitadas em intervalos compactos, com descontinuidades ao longo de gráficos. Conjuntos simples em $\mathbb{R}^n$. Integrabilidade das funções contínuas e limitadas no interior de um conjunto simples em $\mathbb{R}^n$.

32. Aplicações do integral ao cálculo de volumes, massas, centros de massa, momentos de inércia.

33. Mudança de variáveis de integração. Exemplos.

34. Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. Exemplos.

35. Exemplos.

V. Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

18. Teorema da função inversa.

19. Continuação. Exemplos. Introdução ao teorema da função implícita (apontando para a noção de variedade diferencial).

20. Teorema da função implícita.

21. Continuação. Exemplos.

VI. Variedades Diferenciais

22. Definição de variedades diferenciais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, através de sistemas de $(n-m)$ equações em $\mathbb{R}^n$. Espaço normal e espaço tangente. Exemplos.

23. Descrição local de variedades como gráficos de funções. Exemplos. Parametrizações.

24. Parametrizações. Exemplos.

25. Extremos condicionados. Método dos multiplicadores de Lagrange. Exemplos.

26. Conclusão do estudo de extremos condicionados.

VII. Integrais de Campos Escalares em Variedades

36. Volume-m de um paralelipípedo-m em $\mathbb{R}^n$. Definição de integral de um campo escalar numa vizinhança de coordenadas de uma variedade-m em $\mathbb{R}^n$.

37. Independência do integral de um campo escalar numa vizinhaça de coordenadas relativamente à parametrização. Exemplos e aplicações ao cálculo de comprimentos, áreas, massas e momentos de inércia.

VIII. Integrais de Linha de Campos Vectoriais

38. Integrais que dependem da parametrização a menos de sinal. Integral de linha de um campo vectorial. Trabalho de uma força. Dependência do trabalho na parametrização. Trabalho de uma força constante. Forças conservativas. Lei de conservação da energia.

39. Conjuntos conexos por arcos. Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha. Campos gradientes e campos potenciais. Campo gravítico de Newton.

40. Condições necessárias e suficientes para um campo vectorial ser gradiente. Campos fechados. Cálculo de funções potenciais. Exemplos.

41. Homotopia de caminhos. Invariância do integral de campos fechados sobre caminhos homotópicos. Conjuntos simplesmente conexos. Campos fechados em conjuntos simplesmente conexos são gradientes.

42. Exemplos. Teorema de Green.

43. Exemplos.

IX. Integrais de Campos Vectoriais em Variedades

44. Domínios regulares, normal exterior. Teorema da divergência.

45. Conclusão da matéria anterior. Exemplos. Tornar a mencionar brevemente o teorema de Green.

46. Interpretação geométrica e física da divergência. Orientabilidade de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Fluxos de campos vectoriais através de superfícies orientáveis em $\mathbb{R}^3$.

47. Orientação consistente do bordo de uma superfície. Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$. Exemplos. (Incluir cálculo de potenciais vectores nos exemplos.)

48. Conclusão da matéria anterior. Interpretação geométrica e física do rotacional. Exemplos.

49. Exemplos do cálculo de fluxos e de aplicação dos teoremas da divergência e de Stokes.

50. Algumas propriedades da divergência, rotacional e gradiente (mencionando $rot(grad) = 0$ e $div(rot) = 0$). Equações de Maxwell. Lei de Ampère e lei de Faraday.

51. Conclusão da matéria anterior e revisões.

52. Revisões.