

Cálculo Diferencial e Integral II — Lista de exercícios extra das aulas práticas e das aulas de revisão para o Teste 1

Limites, Continuidade e Diferenciabilidade

Teste de Recuperação – 29/1/2011 – Versão 1

1. Seja $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$. Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

Teste de Recuperação – 29/1/2011 – Versão 2

1. Sendo $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^4}$, determine $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Teste de Recuperação – 12/1/2009

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se f é contínua na origem. Sugestão: Relembre que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$.

Teste 1 – 7/11/2009

1. Calcule ou mostre que não existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^7 + y^7}{x^6 + y^6}$.

Teste 1 – 5/11/2011

2. Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{kx^3 + y^4}{2x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine k de modo que $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 5$.

Teste de Recuperação – 26/6/2009

1. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{a}}(0, 0) = 1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{b}}(0, 0) = 3$, onde $\vec{a} = (1, 2)$ e $\vec{b} = (0, 1)$. Determine a matriz Jacobiana $D\varphi(0, 0)$.

Teste 1 – 10/11/2012

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-y^3}{3x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.
(b) Determine as derivadas parciais de f em $(0, 0)$.
(c) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Teste de Recuperação/Exame – 24/6/2011

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 4y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Mostre que g é contínua na origem.
- (b) Calcule $\nabla g(0, 0)$ e a derivada de g na origem segundo o vector $v = (3, 1)$. O que pode concluir acerca da diferenciabilidade de g na origem?

Derivada da Função Composta

Teste de Recuperação – 28/1/2013

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0, 1) = -1$ e $Dg(0, 1) = [2 \ 3]$ e seja $f(t) = (t^3, t^2)$. Determine $D(f \circ g)(0, 1)$.

Teste 1 – 6/11/2010

2. Considere a função $h(x, y) = (x^3 + xy^2, \log(xy))$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(2, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(1, 1)$ segundo o vector $\vec{v} = (0, 1)$.

Teste 1 – 5/11/2011

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Df(1, 1) = [3 \ 1]$. Calcule a derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$, sabendo que $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, onde $u(x, y) = e^{-x}$ e $v(x, y) = e^y$.

Teste 1B – 24/4/2010

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $f = f(u, v)$ de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2, 0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 0) = -1$. Sendo h a função definida por $h(x, y) = f(2x - y^2, xy)$, calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1, 0)$.

Exame 2 – 7/7/2010

1. Considere a função $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{xy} \right).$$

- (a) Determine os pontos de \mathbb{R}^2 aos quais f pode ser prolongada por continuidade.
- (b) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2, 1)$ no ponto $(x, y) = (1, 1)$.
- (c) Sendo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida pela expressão $g(t) = (1 + \cos(t), e^t)$, determine $D(g \circ f)(1, 1)$.
- (d) Seja $h(x, y) = f(x - f(x, y), y + x^2 - 1)$. Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)$.

Rectas/Planos Tangentes ou Normais

Teste de Recuperação – 18/6/2008

3. Determine a recta normal ao cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ no ponto $(3, 4, 5)$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 1

6. Determine um ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 3$ para o qual a recta tangente nesse ponto tem a direcção do vector $(2, 1)$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 2

6. Determine um ponto da superfície $z = 2 - xy$ para o qual a recta normal à superfície nesse ponto passa na origem.

Pontos Críticos e Extremos

Exame 2 – 7/7/2010

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$.

Teste 1 – 7/11/2009

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $h(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2 + 6z + 2x - 2y$.

Teste de Recuperação – 18/6/2008

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla f(0, 1) = (0, 1)$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = f(y, \cos x)$.

(a) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto de estacionaridade de φ .

(b) Sabendo que a entrada $(1, 1)$ da matriz Hessiana de f no ponto $(0, 1)$ é -2 , mostre que a matriz Hessiana de φ no ponto $(0, 0)$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Classifique o ponto de estacionaridade $(0, 0)$ de φ .

Integrais Múltiplos – Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis

Teste 1 – 10/11/2012

4. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. Sendo $g(x, y) = 3e^{y^3}$, calcule $\int_A g$.

Teste 1 – 14/4/2012

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z < 2, z > y^2, 0 < x < 1, y > 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$, e da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(b) Calcule o integral da função $f(x, y, z) = x$ em V .

Teste de Recuperação – 4/1/2008

1. Considere o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - x - y, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

- (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.
- (b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
- (c) Calcule o integral da função $f(x, y, z) = x$ em V .

Teste 2 – 14/1/2012

1. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$.

- (a) Obtenha uma expressão para o volume de V usando integrais triplos da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
- (b) Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo OZ , considerando uma densidade de massa $k(x, y, z) = y$.

Teste de Recuperação – 23/6/2012

4. Considere o conjunto definido por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < 2; 0 < x < 2y + 2\}$. Escreva uma expressão para o volume de D em termos de integrais iterados da forma:

- (a) $\int(\int(\int dx)dy)dz$;
- (b) $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

Teste de Recuperação – 23/6/2012

5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < (y^2 + z^2)^{1/4}; z > 0; x^2 + y^2 + z^2 < 2\} .$$

Teste de Recuperação – 4/1/2008

2. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > |x|, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \right\}$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Teste 2 – 15/12/2007

2. Usando a mudança de variáveis $u = x + y; v = y - x^3$ para calcular a massa do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2, 0 < y - x^3 < 1\} ,$$

cujas densidade de massa é a função $\sigma(x, y) = 1 + 3x^2$.

Teste de Recuperação – 28/1/2013

4. Considere a função $f(x, y) = \frac{2y}{x}e^{xy}$ e o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < xy < 2, 1 < \frac{y}{x} < 3\} .$$

Calcule $\int_S f$, utilizando uma mudança de variáveis apropriada.