Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II - Exercícios-Desafio

Exercício 1

a) Mostre que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se $A \subset \mathbb{R}^m$, define-se a imagem inversa de A por f por $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in A\}$. Mostre que f é contínua sse imagem inversa por f de qualquer aberto em $\mathbb{R}^m$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$.

c) Mostre que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo.

d) Mostre que os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ que contêm pelo menos dois pontos distintos são os intervalos.

e) Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se localmente constante se $\forall a \in D$ existe um aberto $U \subset D$ com $a \in U$, tal que a restrição de f a U é constante. Mostre que uma função localmente constante definida num subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ é constante.

Exercício 2

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ um campo escalar tal que todas as derivadas parciais de φ existem em U, sendo as funções $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ contínuas em U para $j = 2, \ldots, n$.

Mostre que φ é diferenciável em qualquer ponto $a \in U$.

Exercício 3

Assumindo a validade do Teorema da Função Inversa, demonstre o Teorema da Função Implícita.

Sugestão: Considere $F : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com $n > m$, com S aberto e F de classe C^1 e as equações $F(z, y) = 0$ com $(z, y) \in S$ e $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Considere a função $H : S \to \mathbb{R}^n$ definida por $H(z, y) = (z, F(z, y))$. Aplique o Teorema da função inversa à função H.

Exercício 4

O método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar os pontos críticos de uma função f de classe C^1 numa variedade M. Este exercício fornece um critério para determinar a natureza desses pontos críticos (máximo ou mínimo local):

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \subset S$ uma variedade-m. Seja f um campo escalar de classe C^2 definido em S e seja $p \in M$ um ponto crítico de $f_{|_M}$ tal que, de acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, a função $g = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_{n-m} F_{n-m}$, definida numa vizinhança aberta U de p, tem um ponto crítico em p, onde $M \cap U = \{x \in U : F_j(x) = 0, \ \ j = 1, ..., n-m\}$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, ..., n-m$.

Seja $H(p)$ a matriz Hessiana de g, i.e. a matriz das segundas derivadas parciais de g. Mostre que:

a) Para que p seja um mínimo relativo é necessário que $(v, H(p)v) \geq 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

b) Para que p seja um mínimo relativo é suficiente que $(v, H(p)v) > 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

c) Para que p seja um máximo relativo é necessário que $(v, H(p)v) \leq 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

d) Para que p seja um máximo relativo é suficiente que $(v, H(p)v) < 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

Sugestão: Se $p \in M$ é um mínimo (ou máximo) relativo então pense no que acontece aos valores de f sobre curvas que passam em p. Lembre-se de utlizar o facto de p ser um ponto crítico de g. i.e. $\nabla g(p) = 0$.

Exercício 5

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto parametrizado, ou seja tal que existe uma parametrização $g : A \subset R^m \to M$, com $g(A) = M$. Mostre que localmente M é o gráfico de uma função, ou seja:

Mostre que $\forall p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, e um aberto $V \in \mathbb{R}^m$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 tal que é possível escolher coordenadas em $\mathbb{R}^n$ de modo a que

$$M \cap U = \{(z, f(z)) : z \in V\}.$$

Sugestão: Com coordenadas $t_1, t_2, ..., t_m$ em A, a parametrização g tem a forma $g(t_1, ..., t_m) = (g_1(t_1, ..., t_m), ..., g_n(t_1, ..., t_m))$. Utilize o teorema da função implícita para escrever $(n-m)$ das coordenadas dos pontos de $M \cap U$ em função das restantes m coordenadas. Lembre-se que, por definição, se g é uma parametrização então Dg tem característica máxima m em todos os pontos de A. Recorde também que a característica de uma matriz é dada pelo número de colunas linearmente independentes que é igual também ao número de linhas linearmente independentes.

Exercício 6

Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona definida num intervalo compacto $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.

Exercício 7

O objectivo deste exercício é demonstrar, através de vários passos relativamente simples, um caso particular do Teorema de Sard que diz o seguinte:

"Seja $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Seja $B = \{x \in A : \det DG(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada de g é singular. Então o conjunto $g(B)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$."

Ou seja, o Teorema de Sard diz que as imagens por g dos pontos onde Dg é singular formam um conjunto de medida nula. O exercício é demonstrar este resultado em seis passos simples:

Passo 1. Seja l suficientemente pequeno e $U \subset A \subset \mathbb{R}^n$ um cubo-n fechado de lado l. Seja $\epsilon > 0$. Seja $N > 1$ um inteiro e divida-se U em N^n sub-cubos-n de lado l/N. Seja S um desses sub-cubos e $x \in S$.

Mostre que para N suficientemente grande se tem

$$|Dg(x) \cdot (x - y) - g(y) + g(x)| < \epsilon |x - y| \leq \epsilon \sqrt{n} l/N, \ \ \forall y \in S.$$

Sugestão: A função g é diferenciável. Utilize a definição e propriedades de Dg.

Passo 2. Suponha que $x \in S \bigcap B$. Mostre que o conjunto $\{Dg(x) \cdot (x - y) : y \in S\}$ está contido num plano-$(n-1)$, V, em $\mathbb{R}^n$.

Sugestão: Esta parte é só álgebra linear. Observe apenas o que significa $\det DG(x) = 0$.

Passo 3. Mostre que a distância do conjunto $\{g(y) : y \in S\}$ ao plano-$(n-1)$ dado por $g(x) + V$, é menor do que $\epsilon\sqrt{n}(l/N)$.

Sugestão: Utilize os passos 1 e 2.

Passo 4. Mostre que existe um $M > 0$ tal que

$$|g(y) - g(z)| < M|y - z| \leq M\sqrt{n}(l/N), \ \ \forall y, z \in S.$$

Sugestão: As derivadas parciais de g são contínuas no compacto U que contém S. Observe então que $g_j(y) - g_j(z) = g_j(y_1, ..., y_n) - g_j(z_1, y_2, ..., y_n) + g_j(z_1, y_2, ..., y_n) - g_j(z_1, z_2, y_3, ..., y_n) + g_j(z_1, z_2, y_3, ..., y_n) + \cdots + g_j(z_1, ..., z_{n-1}, y_n) - g_j(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$. Aplique o teorema do valor intermédio.

Passo 5. Conclua que, se S intersecta B, o conjunto $\{g(y) : y \in S\}$ está contido num cilindro-n de altura $< 2\epsilon\sqrt{n}(l/N)$ e com base dada por uma bola-$(n-1)$ de raio $< M\sqrt{n}(l/N)$. Conclua que $g(U \bigcap B)$ tem medida nula.

Passo 6. Conclua que $g(B)$ tem medida nula.

Exercício 8

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \cap U$ uma vizinhança de coordenadas, i.e. um sub-conjunto de M que é parametrizável. Seja $f : M \cap U \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $M \cap U$.

Mostre que $\int_{M\cap U} f$ não depende da parametrização utilizada para calcular o integral.

Exercício 9

Mostre que o teorema da divergência em $\mathbb{R}^2$ é equivalente ao teorema de Green.

Sugestão: Considere o campo vectorial $f = (f_1, f_2)$ e o campo vectorial $h = (f_2, -f_1)$. Aplique o teorema da divergência ao campo h.

Exercício 10

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Seja $S \subset M$ uma superfície tal que a fronteira ∂S é uma variedade-1 compacta e tal que $g : A \subset \mathbb{R}^3 \to S$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, é uma parametrização de S que pode ser estendida ao fecho de A de modo a que $g(\partial A) = \partial S$.

Seja n uma orientação de S e oriente-se a sua fronteira ∂S de modo consistente. Seja f um campo vectorial de classe C^1 definido num aberto de $U \subset \mathbb{R}^3$ com $S \subset U$.

Utilizando o teorema de Green, demonstre o teorema de Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} f \cdot n = \oint_{\partial S} f.$$

Sugestão:

Passo 1. Escreva a a expressão explícita para $\int_S \operatorname{rot} f \cdot n$ utilizando a parametrização g. Lembre-se que pode escrever n utilizando g.

Passo 2. Reescreva a integranda na forma propícia para aplicação do teorema de Green. Aplique o teorema de Green.

Passo 3. Reescreva o resultado na forma $\oint_{\partial S} f$.