

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios de Auto-Avaliação (Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n)

1. Caracterize topologicamente os seguintes conjuntos:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\}$.

c) $C \cup D$, sendo

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x = y ; -1 < x < 1\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 ; x = -y ; -1 \leq x \leq 1\}.$$

d) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y < 1\}$.

e) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x^2 + 1 ; -1 < x < 1\}$.

f) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 ; z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}$.

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2}$.

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}-1}{y}$.

e) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

3. Determine o gradiente de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;

b) $f(x, y) = e^x \cos y$;

c) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$;

d) $f(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$.

4. Utilizando a definição, calcule a derivada da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ segundo o vector $v = (1, 1)$ no ponto $(1, 2)$.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as funções definidas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x)),$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

a) Serão f , g e $f \circ g$ diferenciáveis no seu domínio? Justifique.

b) Calcule as matrizes Jacobianas de f , g e $f \circ g$.

c) Calcule a derivada de f segundo o vector $v = (2, 3)$ no ponto $(1, 0)$.

- d) Calcule a derivada de g segundo o vector $(2, 3, 4)$ no ponto $(1, 0, 1)$.
 e) Calcule a derivada de $f \circ g$ segundo o vector $(2, 3, 1)$ no ponto $(1, 2, 1)$.
6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x, y) = (x^2 + y, 2x + y, e^y + 2x),$$

$$g(u, v, w) = uvw.$$

- a) Serão f , g e $g \circ f$ diferenciáveis no seu domínio? Justifique.
 b) Calcule as matrizes Jacobianas de f , g e $g \circ f$.
 c) Calcule as derivadas de f e $g \circ f$ segundo o vector $(1, 2)$ no ponto $(3, 4)$.
 d) Calcule a derivada de g segundo o vector $(3, 3, 4)$ no ponto $(1, 1, 1)$.
7. a) Considere o caminho $\alpha : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(t) = (t, t^2)$. Esboce a curva representada por α e determine as respectivas recta tangente e recta normal no ponto $(1, 1)$.
 b) Considere o caminho $\beta : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\beta(t) = (t \cos t, t \sin t)$. Esboce a curva representada por β e determine as respectivas recta tangente e recta normal no ponto $(0, \pi/2)$.
 c) Considere o caminho $\gamma : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$. Esboce a curva representada por γ e determine a recta tangente e o plano normal no ponto $(0, \pi/2, \pi/2)$.
8. Determine o plano normal e a recta tangente à linha $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^3; z = 1\}$ no ponto $(1, 1, 1)$.
9. Determine a recta normal e o plano tangente ao elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 3,$$

no ponto $(2, 3, 4)$.

10. Determine e classifique os pontos de estacionaridade dos seguintes campos escalares:

- a) $f(x, y) = e^{xy}$.
 b) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2) + x$, em $x^2 + y^2 \leq 1$.
 c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + z^2$.
 d) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.
 e) $f(x, y) = (1 - x^2 + y^2)e^{x-y}$.

11. Considere a função $f(x, y) = \int_0^{x+y} \sin(t^2) dt$.

- a) Mostre que f é diferenciável no seu domínio.
 b) Calcule a derivada de f no ponto $(1, 1)$.
 c) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de f .

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em \mathbb{R}^2 . Mostre que f é diferenciável desde que uma destas derivadas parciais seja contínua.

13. Sendo f e g funções reais de variável real de classe C^2 considere a função

$$\phi(x, t) = f(x - t) + g(x + t).$$

Mostre que ϕ satisfaz a chamada equação das ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

14. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial e $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar ambos de classe C^2 . Chama-se divergência de f ao campo escalar dado por

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

e rotacional de f ao campo vectorial definido por

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

Mostre que se tem

$$\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0; \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0.$$

15. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F = \nabla\phi$. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 .

Mostre que se tem

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \phi(Q) - \phi(P),$$

em que $P = \gamma(0)$ e $Q = \gamma(1)$.

16. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e N o conjunto de nível zero de f . Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\gamma(\mathbb{R}) \subset N$. Seja $A = \gamma(0)$.

Mostre que os vectores $\nabla f(A)$ e $\gamma'(0)$ são ortogonais. Interprete geometricamente este resultado.