Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 11 de Abril de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe.
Resolução: Os limites de g na origem relativos às rectas $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 + x^3}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

variam em função de m, portanto o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de g no ponto $(0,0)$, segundo o vector $(1,1)$.
Resolução: A derivada é dada pelo limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2+t^3}{2t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \right),$$

que não existe.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(2,1) = (1,1)$ e g é diferenciável no ponto $(2,1)$ com matriz Jacobiana

$$Dg(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sin(3(x-1)) + y$.

(2 val.) (a) Calcule $D(f \circ g)(2,1)$.
Resolução: Pelo teorema da função composta:

$$D(f\circ g)(2,1) = Df(g(2,1))Dg(2,1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) (b) Sendo $k(x,y) = g(x+1, f(x,y))$ calcule $Dk(1,1)$.
Resolução: k é a composição $g \circ h$, onde $h(x,y) = (x+1, f(x,y))$. Pelo teorema da função composta:

$$Dk(1,1) = D(g\circ h)(1,1) = Dg(h(1,1))Dh(1,1) = Dg(2,1)Dh(1,1)$$

ou seja

$$Dk(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $h(x,y) = x^2 - 2xy + xy^2$.

Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla h(x,y) = (2x - 2y + y^2, -2x + 2xy) = (0,0),$$

tem como soluções os pontos $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (0,2)$ e $(x,y) = (1/2,1)$, pelo que estes são os únicos pontos críticos.

A matriz hessiana de h é:

$$H_h(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2+2y \\ -2+2y & 2x \end{bmatrix}.$$

Para os pontos $(0,0)$ e $(0,2)$ o determinante deste matriz é negativo, logo a matriz tem um valor próprio positivo e outro negativo e, portanto, $(0,0)$ e $(0,2)$ são pontos em sela. Para o ponto $(1/2,1)$

$$H_h(1/2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cujos valores próprios são ambos positivos, portanto $(1/2,1)$ é ponto de mínimo relativo.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\ ;\ 0 < z < 2 - x^2 - y^2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;

Resolução:

$$\text{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2-x^2-y^2} 1\, dz \right) dy \right) dx$$

(2 val.) b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\text{vol}(S) \;&=\; \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^1 1\, dx \right) dy \right) dz \;+ \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-z}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-z}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz.\end{aligned}$$

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1 + y^2\ ;\ 0 < y < 1\ ;\ z > 0\ ;\ x > 0\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) tem-se:

$$\text{vol}(B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1+y^2}} \rho \, d\rho \right) dy \right) d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

(3 val.) 6. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ onde $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\int_1^2 g(r) r \, dr = \alpha$. Mostre que

$$\int_A h = 2\pi \left(4g(2) - g(1) - 2\alpha \right),$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (x, y)$.

Resolução: Pelo teorema da função composta:

$$\nabla f(x, y) = g'(r)(x/r, y/r),$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim:

$$h(x, y) = g'(r)(x/r, y/r) \cdot (x, y) = g'(r) r.$$

Mudando para coordenadas polares no integral $\int_A h$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_A h &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 g'(r) r.r \, dr \, d\theta \\
&= 2\pi \int_1^2 g'(r) r^2 \, dr \\
&= 2\pi \left(\left[g(r) r^2 \right]_1^2 - \int_1^2 g(r).2r \, dr \right) \\
&= 2\pi (4g(2) - g(1) - 2\alpha),
\end{aligned}$$

usando integração por partes na penúltima passagem.