Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 11 de Abril de 2015 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-2x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: f é contínua na origem, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, pois:

$$\left|\frac{xy-2x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy-2x^3|}{r} \leq \frac{|xy|+2|x^3|}{r} \leq \frac{r^2+2r^3}{r} = r + 2r^2$$

com $\lim_{r\to 0^+} r + 2r^2 = 0$ (critério de majoração).

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$.

Resolução: A derivada é dada pelo limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2-2t^3}{\sqrt{2t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-2t^2}{\sqrt{2t^2}}\,.$$

Este limite não existe, pois os seus limites laterais são diferentes.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2,3) = (2,3)$ e f é diferenciável no ponto $(2,3)$ com matriz Jacobiana

$$Df(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda g dada por $g(t) = (2t, \cos(\pi t/2) + 3)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (a) Calcule $D(f \circ g)(1)$.

Resolução: Pelo teorema da função composta:

$$D(f\circ g)(1) = Df(g(1))Dg(1) = Df(2,3)\begin{bmatrix} 2 \\ -\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\pi \\ -\pi/2 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) (b) Calcule $D(f \circ f)(2,3)$.

Resolução: Pelo teorema da função composta:

$$D(f\circ f)(2,3) = Df(f(2,3))Df(2,3) = Df(2,3)Df(2,3)$$

ou seja

$$D(f\circ f)(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x, y) = y^4 + 2x^2 - 4xy$.

Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla g(x, y) = (4x - 4y, 4y^3 - 4x) = (0, 0),$$

tem como soluções os pontos $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (1, 1)$ e $(x, y) = (-1, -1)$, pelo que estes são os únicos pontos críticos.

A matriz hessiana de g é:

$$H_g(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix},$$

logo

$$H_g(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é igual a -16, logo a matriz tem um valor próprio positivo e outro negativo e, portanto, $(0, 0)$ é um ponto em sela. Para os pontos $(x, y) = (1, 1)$ e $(x, y) = (-1, -1)$ a matriz Hessiana é dada por

$$H_g(\pm 1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Temos $\det H_g(\pm 1, \pm 1) = 32$, logo os valores próprios da matriz têm o mesmo sinal. Como o traço da matriz é igual 16, podemos concluir que os valores próprios são positivos e portanto os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ são pontos de mínimo relativo.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \; ; \; 0 < 2z < 3 + y\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;

Resolução:

$$\text{vol}(S) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{0}^{\frac{3+y}{2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx$$

(2 val.) b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\text{vol}(S) = \int_{0}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \right) dy \right) dz + \int_{1}^{2} \left(\int_{2z-3}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule a massa do sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x^2 + z^2 \ ; \ y < \sqrt{2 - x^2 - z^2}\},$$

sabendo que a função densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = 2y$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) tem-se:

$$\mathsf{M}(B) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} 2y\rho \, d\rho \right) dy \right) d\theta = \frac{5\pi}{12}.$$

(3 val.) 6. Prove o *Teorema de Pappus*: Se R é uma região limitada no 1º quadrante do plano xy com área $A > 0$, então o volume do sólido que se obtém por rotação de R em torno do eixo $0y$ é dado por

$$V = 2\pi A\bar{x},$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da região R.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) o volume do sólido é dado por

$$\mathsf{vol} = \int_0^{2\pi} \iint_R \rho \, d\rho \, dy \, d\theta = 2\pi \iint_R \rho \, d\rho \, dy.$$

Uma vez que a coordenada x do centróide é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x \, dx \, dy$$

podemos concluir que o volume é dado por $V = 2\pi A\bar{x}$.