Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS
TESTE 2 – 20 DE DEZEMBRO DE 2008 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

(1) Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1, \;\; x \geq 0, \, y \geq 0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dz)dy)dx$.

Resolução. Os cortes de V com $x = const$, $0 < x < 1$, são os seguintes conjuntos

$$A_x = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y > 0; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

A expressão para o volume de V é então

$$vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 1 \; dz \right) dy \right) dx.$$

(3 val.) b) Calcule o volume de V.

Resolução. É conveniente calcular o volume de V em coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\operatorname{sen}(\theta) \\ z &= z \; . \end{cases}$$

Temos então que $x^2+y^2 \leq z \leq 1 \Leftrightarrow \rho^2 \leq z \leq 1$, and $x \geq 0, \; y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, pelo que

$$\begin{aligned} vol(V) &= \iiint_V 1 \; dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{\rho^2}^1 \rho \; dz d\rho d\theta = \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(2) Seja

$$h(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y, \frac{y}{x^2 + y^2} + x \right).$$

(2 val.) a) Calcule o trabalho de h ao longo da elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, orientada no sentido horário.

Resolução. Vemos que $h = G + F$, onde

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ F(x,y) &= (y,x) \end{aligned}$$

O campo G é central, logo conservativo pelo que $\oint_E G \cdot dg = 0$. O campo F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Verifiquemos se é fechado:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Leftrightarrow 1 = 1.$$

Como F é fechado e o seu domínio é simplesmente conexo concluímos que é conservativo pelo que também, $\oint_E F \cdot dg = 0$ e portanto

$$\oint_E h \cdot dg = \oint_E G \cdot dg + \oint_E F \cdot dg = 0.$$

b) Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $\gamma(t) = (1+t, t^3), t \in [0,1]$. (2 val.)

Resolução. O caminho não é fechado, $g(0) = P = (1,0)$ e $g(1) = Q = (2,1)$. G é central da forma

$$G = \frac{1}{r}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right),$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Os potenciais escalares de G são dados por $\varphi_1(x,y) = \int \frac{1}{r}\, dr = \log(r) + c = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$. Vamos escolher $c = 0$. Para encontrar um potencial de F resolvemos o sistema

$$\nabla\varphi_2 = F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= F_1 = y \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= F_2 = x \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $\varphi_2 = yx + c_1(y)$. Substituindo na segunda fica $\frac{dc_1}{dy} = 0$ pelo que podemos escolher $c_1 = 0$ e um potencial de F é $\varphi_2 = xy$. Um potencial de h é então

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + xy.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha obtemos

$$\int_C h \cdot d\gamma = \int_C \nabla\varphi \cdot d\gamma = \varphi(2,1) - \varphi(1,0) = \frac{1}{2}\log(5) + 2.$$

(3) Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 1\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z < 0$.

a) Calcule a massa total de S sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$. (2 val.)

Resolução. Uma parametrização de S é dada por

$$g \ : \ \begin{cases} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\text{sen}(\theta) \\ z &= 2-\rho^2. \end{cases} \ , \ 0<\theta<2\pi, \ 1<\rho<\sqrt{2}.$$

Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}\times\frac{\partial g}{\partial \theta} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & -2\rho \\ -\rho\text{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = (2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\text{sen}(\theta), \rho).$$

Para a massa obtemos

$$\begin{aligned} M_S &= \iint_S \alpha = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \alpha\ ||\frac{\partial g}{\partial \rho}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}||\ d\rho\ d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\sqrt{\rho^2+4\rho^4}d\rho d\theta = 2\pi(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4)|_1^{\sqrt{2}} = 7\pi. \end{aligned}$$

(2 val.) b) Utilizando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo $f(x,y,z)=(x,y,-2z)$ através de S no sentido de n.

Resolução. $\text{div}(f)=0$. Escolhemos o aberto

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z<2-x^2-y^2, 0<z<1\},$$

para o qual $\partial D = S\cup T_1\cup T_2$, onde as "tampas" são

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2\le 2, z=0\} \\ T_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2\le 1, z=1\}. \end{aligned}$$

Temos

$$\iiint_D \text{div}(f)\ dxdydz = \iint_S f\cdot(-n) + \iint_{T_1} f\cdot n_1 + \iint_{T_2} f\cdot n_2,$$

onde o sinal no termo do fluxo através de S se deve ao facto da normal unitária n coincidir com a normal unitária interior a D. O integral no 1º membro anula-se porque $\text{div} f=0$ pelo que

$$\iint_S f\cdot n = \iint_{T_1} f\cdot n_1 + \iint_{T_2} f\cdot n_2.$$

Em T_1 temos $z=0$ e $n_1=(0,0,-1)$ pelo que a função integranda é, $f\cdot n_1=0$ e

$$\iint_{T_1} f\cdot n_1 = 0.$$

Em T_2 temos $z=1$ e $n_1=(0,0,1)$ pelo que a função integranda é, $f\cdot n_2=-2$ e

$$\iint_{T_2} f\cdot n_2 = -2\text{area}(T_2) = -2\pi.$$

Temos então

$$\iint_S f \cdot n = \iint_{T_1} f \cdot n_1 + \iint_{T_2} f \cdot n_2 = -2\pi.$$

c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\operatorname{rot} h$ através de S no sentido de n, onde $h(x,y,z) = (-y, x, z)$. (3 val.)

Resolução. Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot}(h) \cdot n = \oint_{\partial S} h \cdot dg = \oint_{C_1} h \cdot dg_1 + \oint_{C_2} h \cdot dg_2$$

onde $\partial S = C_1 \cup C_2$ e

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 2, z = 0\} \\ C_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, z = 1\}. \end{aligned}$$

Parametrizações de C_1 e C_2, já tendo em conta a orientação induzida por n, são

$$g_1 : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(s) \\ y = -\sqrt{2}\operatorname{sen}(s) \\ z = 0 \end{cases} ,0 < s < 2\pi, \quad g_2 : \begin{cases} x = \cos(s) \\ y = \operatorname{sen}(s) \\ z = 1 \end{cases} ,0 < s < 2\pi.$$

Temos

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot}(h) \cdot n &= \oint_{\partial S} h \cdot dg = \oint_{C_1} h \cdot dg_1 + \oint_{C_2} h \cdot dg_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\operatorname{sen}(s), \sqrt{2}\cos(s), 0) \cdot (-\sqrt{2}\operatorname{sen}(s), -\sqrt{2}\cos(s), 0) ds + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 1) \cdot (-\operatorname{sen}(s), \cos(s), 0) ds = -2\pi. \end{aligned}$$

(4) Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 harmónico, ou seja, tal que $\operatorname{div} \nabla\phi = 0$. Para $c \in \mathbb{R}$, considere o conjunto de nível de ϕ (3 val.)

$$S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y,z) = c\}.$$

Supondo que S_c é uma variedade-2 compacta e orientável e fronteira de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$, mostre que $\exists p \in S_c$ tal que $\nabla\phi(p) = 0$.

Resolução. Vamos mostrar por redução ao absurdo, i.e. vamos supor que $\nabla\phi(p)$ é diferente de zero para todos os pontos p da superfície S_c, que assumimos conexa. Então $n_{ext} = \pm \frac{\nabla\phi}{||\nabla\phi||}$,

$$\begin{aligned} 0 = \iiint_D \operatorname{div}\nabla\phi \ dxdydz &= \iint_{S_c} \nabla\phi \cdot n_{ext} = \\ &= \pm \iint_{S_c} \frac{\nabla\phi \cdot \nabla\phi}{||\nabla\phi||}, \end{aligned}$$

onde D é o aberto tal que $\partial D = S_c$. Como a função integranda no último integral é positiva em todos os pontos o integral não pode ser igual a zero. Da contradição obtida concluímos que $\nabla \phi$ não pode ser diferente de zero para todos os pontos de S_c.