Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEBIOM, MEFT
TESTE 2 – VERSÃO 1 – 15 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

RESOLUÇÃO

(1) Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A da forma $\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots} dx)\,dy)\,dz$.

Resolução

$$Vol(A) = \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-z-y^2}} dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{4-z}} \left(\int_0^{\sqrt{4-z-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) b) Calcule o volume de A.

Resolução

$$Vol(A) = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_0^{4-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{9}{8}\pi.$$

(2) Seja B a superfície

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 4\},$$

orientada com a normal unitária n, com $n_y < 0$. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x,y,z) = (xy, -y^2, yz)$ através de B no sentido de n:

(3 val.) a) Pela definição de fluxo.

Resolução

Parametrizemos B com $g\ :]1,2[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho^2, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Temos,

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} | & | \\ \partial_\rho g & \partial_\theta g \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\rho & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$n = +\frac{\partial_\rho g \times \partial_\theta g}{||\partial_\rho g \times \partial_\theta g||} = \frac{1}{||\partial_\rho g \times \partial_\theta g||}(2\rho^2\cos\theta, -\rho, 2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

O fluxo é então,

$$\int_B f \cdot n = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\rho^3\cos\theta, -\rho^4, \rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot (2\rho^2\cos\theta, -\rho, 2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\rho d\theta =$$

$$= 6\pi \int_1^2 \rho^5 d\rho = 63\pi.$$

b) Utilizando o teorema da divergência. (2 val.)

Resolução

A superfície B e os disco T_1, T_2 de raios 1 e 2 centrados nos pontos $(0,1,0)$ e $(0,4,0)$ e paralelos ao plano xz fecham um volume V. Orientamos T_1, T_2 com a normal unitária exterior a V, $n_{T_1} = (0,-1,0)$ e $n_{T_2} = (0,1,0)$. Pelo teorema da divergência,

$$\int_V \operatorname{div} f = \int_B f \cdot n + \int_{T_1} f \cdot n_{T_1} + \int_{T_2} f \cdot n_{T_2},$$

uma vez que n é exterior a V. Ora, $\operatorname{div} f = 0$; $f \cdot n_{T_1} = y^2 = 1$ em T_1 e $f \cdot n_{T_2} = -y^2 = -16$ em T_2. Logo,

$$\int_B f \cdot n = 0 - \int_{T_1} f \cdot n_{T_1} - \int_{T_2} f \cdot n_{T_2} = -\mathrm{area}(T_1) + 16\,\mathrm{area}(T_2) = -\pi + 64\pi = 63\pi.$$

c) Utilizando o teorema de Stokes. (3 val.)

Resolução

O domínio de f é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela; como $\operatorname{div} f = 0$, existe um potencial vector h com $\operatorname{rot} h = f$. Temos

$$\begin{cases} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 &= f_1 = xy \\ \partial_3 h_1 - \partial_1 h_3 &= f_2 = -y^2 \\ \partial_1 h_2 - \partial_2 h_1 &= f_3 = yz \end{cases}.$$

procurando uma solução com $h_2 = 0$ obtemos da primeira equação $h_3 = x\frac{y^2}{2} + \alpha(x,z)$ e da terceira equação $h_1 = -z\frac{y^2}{2} + \beta(x,z)$. A segunda equação pode então ser resolvida pondo $\alpha = \beta = 0$. Logo, $h = (-z\frac{y^2}{2}, 0, x\frac{y^2}{2})$ é um potencial vector para f.

O bordo de B é constituído por uma circunferência, a, de raio 1 centrada em $(0,1,0)$ e contida no plano $y = 1$ e por circunferência, b, de raio 2 centrada em $(0,4,0)$ e contida no plano $y = 4$. A orientação de ∂B induzida por n corresponde a percorrer a no sentido anti-horário e b no sentido horário, do pnto de vista do ponto $(0,10,0)$. Pelo teorema de Stokes, temos então,

$$\int_B f \cdot n = \int_B \operatorname{rot} h \cdot n = \int_{\partial B} h = \oint_a h + \oint_b h.$$

Temos, $a(\theta) = (\cos\theta, 1, -\operatorname{sen}\theta)$ e $b(\theta) = (2\cos\theta, 4, 2\operatorname{sen}\theta)$. Logo,

$$\int_B f \cdot n = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, 0, \frac{1}{2}\cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, 0, -\cos\theta) d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (-16\operatorname{sen}\theta, 0, 16\cos\theta) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 0, -2\cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2} + 32) d\theta = 63\pi.$$

(3) Considere o campo vectorial (3 val.)

$$h(x,y,z) = \left(-y^3 + \frac{-5y}{x^2+y^2}, x^3 + \frac{5x}{x^2+y^2}, 2z\right).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho fechado $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos \frac{t}{2})$, $t \in [0, 4\pi]$.

Resolução

O trabalho do campo $l = (-y^3, x^3, 0)$ pode ser calculado através do teorema de Green no plano, uma vez que a sua componente vertical é nula. A projecção da curva parametrizada por γ no plano xy é uma circunferência de raio 1 centrada na origem e que é percorrida 2 vezes no sentido anti-horário. Como $\partial_1 x^3 - \partial_2(-y^3) = 3(x^2+y^2)$, temos

$$\int l d\gamma = 2 \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^2 r d\theta dr = 3\pi.$$

O campo $(0,0,2z) = \nabla z^2$ é conservativo e o seu trabalho ao longo do caminho fechado γ é nulo. Como bem sabemos, o campo $(\frac{-5y}{x^2+y^2}, \frac{5x}{x^2+y^2}, 0)$ é fechado e não é conservativo no seu domínio, realizando trabalho igual a $5 \times 2\pi = 10\pi$ ao longo de uma circunferência que circule à volta do eixo $x = y = 0$, no sentido anti-horário do ponto de vista do ponto $(0,0,10)$. Logo,

$$\oint h d\gamma = 3\pi + 0 + 2 \times 10\pi = 23\pi.$$

<u>NOTA:</u> Na <u>versão 2</u> deste teste, o problema é semelhante excepto que, em vez do campo $(\frac{-5y}{x^2+y^2}, \frac{5x}{x^2+y^2}, 0)$ aparece o campo, radial e conservativo, $(\frac{5x}{x^2+y^2}, \frac{5y}{x^2+y^2}, 0) = \nabla(\frac{5}{2}\log(x^2+y^2))$. Logo, nesta versão a resposta é 3π.

(3 val.) (4) Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1, tal que existem campos vectoriais de classe C^2, h e h', com $\operatorname{rot} h = \operatorname{rot} h' = f$ no domínio de f. Mostre que existe um campo escalar ϕ e um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$h = h' + \nabla\phi + \alpha\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Resolução

Como $\operatorname{rot} h - \operatorname{rot} h' = \operatorname{rot}(h - h') = 0$, $h - h'$ é um campo vectorial fechado. Seja C uma circunferência em torno do eixo $x = y = 0$ percorrida no sentido anti-horário do ponto de vista do ponto $(0,0,1)$. Seja

$$\oint_C (h - h') = W.$$

Pondo $\alpha = \frac{W}{2\pi}$, temos que o campo

$$h - h' - \alpha\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

realiza trabalho nulo ao longo de *todas* as curvas fechadas contidas em $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$. Logo, este campo é igual a $\nabla\phi$ para algum potencial ϕ definido, e de classe C^2, nesse comjunto.