Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

C?lculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Vers?o 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o s?lido

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ z > 1 \right\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma express?o para o volume de D como uma soma de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

Resolu??o: De $z^2 < 2 - x^2 - y^2$ vemos que $z < \sqrt{2}$. Por outro lado, os cortes de z constante s?o dados pela condi??o $x^2 + y^2 < 2 - z^2$, ou seja, s?o c?rculos de raio $\sqrt{2 - z^2}$. Consequentemente, o volume de D ? dado pelo integral iterado

$$V_3(D) = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-z^2}}^{\sqrt{2-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{2-z^2-y^2}}^{\sqrt{2-z^2-y^2}} 1\, dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) (b) Calcule o volume de D utilizando coordenadas cil?ndricas.

Resolu??o: Em coordenadas cil?ndricas (ρ, φ, z) o s?lido ? descrito pela condi??o $\rho^2 + z^2 < 2$. Recordando que o Jacobiano destas coordenadas ? ρ, temos

$$V_3(D) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho d\rho dz d\varphi = \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - z^2 \right) dz = \frac{(4\sqrt{2} - 5)\pi}{3}.$$

(3 val.) (c) Calcule a ?rea da fronteira de D.

Resolu??o: A fronteira de D ? formada por um c?rculo de raio 1, contido no plano $z = 1$, e por um peda?o S de superf?cie esf?rica. A ?rea do c?rculo ? obviamente π. Para calcularmos a ?rea de S escolhemos a parametriza??o $g : \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada pelas coordenadas esf?ricas (θ, φ):

$$g(\theta, \varphi) = \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \sqrt{2} \cos \theta \right).$$

Para esta parametriza??o temos

$$\det \left(Dg^t Dg \right) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix} = 4 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Portanto

$$V_2(S) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\det \left(Dg^t Dg \right)} d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta = \left(4 - 2\sqrt{2} \right) \pi,$$

pelo que a ?rea da fronteira de D vem

$$V_2(\partial D) = \pi + V_2(S) = \left(5 - 2\sqrt{2} \right) \pi.$$

2. Indique, justificando, se cada uma das afirma??es seguintes ? verdadeira ou falsa:

(1 val.) (a) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$? um campo fechado.
Resolu??o: Verdadeira: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

(1 val.) (b) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$? um campo gradiente.
Resolu??o: Verdadeira, uma vez que ? um campo fechado cujo dom?nio ($\mathbb{R}^2$) ? simplesmente conexo.

(1 val.) (c) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? gradiente.
Resolu??o: Falsa: por exemplo, o campo

$$R(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

? um campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mas n?o ? gradiente (o seu integral ao longo da circunfer?ncia $x^2 + y^2 = 1$ percorrida no sentido directo vale $2\pi \neq 0$).

(1 val.) (d) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$? gradiente.
Resolu??o: Verdadeira, j? que o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$? simplesmente conexo.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superf?cie

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z,\ 0 < z < 1 \right\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G, $\operatorname{rot} G$, atrav?s de S, segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(2 val.) (a) O Teorema de Stokes;
Resolu??o: De acordo com o Teorema de Stokes, temos

$$\int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n = \int_{\partial S} G \cdot dg.$$

O bordo de S ? formado por duas circunfer?ncias C_0 e C_1, de raios 1 e 2, contidas nos planos $z = 0$ e $z = 1$. Uma vez que a normal pretendida ? a que aponta para longe do eixo dos zz, C_0 deve ser orientada no sentido directo (anti-hor?rio) e C_1 no sentido inverso (hor?rio), quando vistas de cima. Usando as parametriza??es $g_0, g_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$g_0(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \qquad g_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1)$$

(onde g_1 induz a orienta??o contr?ria ? pretendida) temos ent?o

$$\int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n = \int_{\partial S} G \cdot dg = \int_0^{2\pi} G(g_0(t)) \cdot \frac{dg_0}{dt}(t)dt - \int_0^{2\pi} G(g_1(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt - \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen} t, -2\cos t, 1) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4dt = 8\pi.$$

(2 val.) (b) O Teorema da Diverg?ncia.

Resolu??o: Uma vez que o Teorema da Diverg?ncia s? se aplica a superf?cies que s?o fronteira de dom?nios regulares, acrescentamos ? superf?cie S os c?rculos

$$T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\};$$
$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Em conjunto, as tr?s superf?cies formam a fronteira de um dom?nio regular D. Pelo Teorema da Diverg?ncia (notando que a normal indicada no enunciado coincide com a normal exterior) temos

$$\int_D \operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n + \int_{T_1} (\operatorname{rot} G) \cdot (0, 0, 1) + \int_{T_0} (\operatorname{rot} G) \cdot (0, 0, -1).$$

Uma vez que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$ e

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z),$$

temos

$$0 = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n + \int_{T_1} (-2) + \int_{T_0} 0 \Leftrightarrow \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n = 2V_2(T_1) = 8\pi.$$

(3 val.) 4. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superf?cie e $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^{\perp} M$ para todo o $x \in M$). Mostre que $\operatorname{rot} H$? um campo vectorial tangente a M em cada ponto.

Resolu??o: Se $\operatorname{rot} H$ n?o fosse tangente a M nalgum ponto $x_0 \in M$ ent?o ter?amos $(\operatorname{rot} H)(x_0) \cdot n(x_0) > 0$ para uma certa normal unit?ria n localmente definida. Uma vez que H ? de classe C^1, e portanto $\operatorname{rot} H$? cont?nuo, existiria um aberto $U \ni x_0$ tal que $(\operatorname{rot} H)(x) \cdot n(x) > 0$ para $x \in U \cap M$. Tomando uma curva simples fechada $C \subset U \cap M$ ter?amos ent?o

$$\oint_C H \cdot dg = \int_M (\operatorname{rot} H) \cdot n > 0,$$

sendo $S \subset U \cap M$ a regi?o em M com bordo C. Mas isto ? uma contradi??o, uma vez que como H ? ortogonal a M temos

$$\oint_C H \cdot dg = \int_a^b H(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) dt = 0,$$

j? que $\frac{dg}{dt}(t)$? tangente a M para qualquer parametriza??o $g : [a, b] \to M$ de C. Concluimos que $\operatorname{rot} H$ tem que ser tangente a M em todos os pontos.