

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 9h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2\}$$

- (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.
- (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0, -1, 1)$.
- (c) Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x, y)$ de classe C^1 num aberto em torno de cada ponto de M .

Resolução:

- (a) A função $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z - 2)$ é de classe C^1 e $M = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = (0, 0)\}$. A derivada de F é dada por

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 4xz^3 & 2yz & 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a primeira linha da matriz nunca se anula em M , a matriz tem característica 2 desde que a entrada $(2,3)$ seja não nula. Como em M a coordenada z não se pode anular conclui-se que DF tem sempre característica 2 e portanto M é uma variedade de dimensão 1 em \mathbb{R}^3 .

- (b) O espaço tangente em $(0, -1, 1)$ é o núcleo da matriz

$$DF(0, -1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

portanto $T_{(0,-1,1)}M = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

- (c) Como $g(x, y, z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z - 2$ é de classe C^1 o Teorema da Função Implícita garante que a equação determina uma função de $z(x, y)$ em torno dos pontos que satisfazem a equação $g = 0$ e verificam

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2 \neq 0$$

Uma vez que $z(z^4 + 2x^2z^2 + y^2) = 2$, a coordenada z e portanto a função $\frac{\partial g}{\partial z}$ não se anulam em M o que demonstra a afirmação do enunciado.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

e o campo vetorial $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z(1-z) \right)$$

- (a) Calcule a área de S .
- (b) Calcule o fluxo de H através de S no sentido da normal unitária com componente z negativa.
- (c) Determine se H é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para H .
- (d) Calcule o trabalho de H ao longo da curva definida pela intersecção de S com o plano definido por $x + 2y = 2$ do ponto $(0, 1, \frac{1}{2})$ ao ponto $(2, 0, 1)$.

Resolução:

- (a) Em coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos zz temos

$$S = \{(\rho, \theta, z) : \frac{\rho^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

Como z é positivo, $\frac{\rho^2}{4} = z^2 \Leftrightarrow z = \frac{\rho}{2}$ e uma parametrização de S é dada por

$$g(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \frac{\rho}{2} \right), \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Temos

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e a área é dada por

$$\int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{\det Dg^T(\rho, \theta) Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta = 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{5}{4}} \rho d\rho = 2\pi\sqrt{5}.$$

- (b) Podemos aplicar o Teorema da divergência ao cone sólido

$$V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} < z^2, 0 < z < 1\}$$

A fronteira de V é $\partial V = S \cup D$ em que $D = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. O Teorema da divergência diz que

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} = \int_{\partial V} H \cdot n^{ext} = \int_S H \cdot n + \int_D H \cdot (0, 0, 1)$$

(uma vez que normal a S dada é a normal exterior ao cone e, em D , a normal unitária exterior a V é o campo vetorial constante igual a $(0, 0, 1)$). A divergência de H é

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (z(1-z)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 2z = 2 - 2z$$

enquanto que $H \cdot (0, 0, 1) = z(1-z) = 0$ em D . Portanto

$$\begin{aligned} \int_S H \cdot n &= \int_V 2 - 2z \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2z} (2 - 2z) \rho d\rho dz d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 4z^2 - 4z^3 dz = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

(c) O campo é conservativo porque $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}$ é claramente um potencial para H .

(d) Pela Regra de Barrow o trabalho é dado por $\phi(2, 0, 1) - \phi(0, 1, \frac{1}{2}) = \frac{5}{6}$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{x^2 + y^2} = 1, x > 0, 1 < z < 2\}$$

e o campo vetorial $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x, y, z) = (yz, -xz + x^2y, 0)$$

(a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária com terceira componente negativa.

(b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe C^1 , não nulo, $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por G ao longo do bordo de S seja nulo.

Resolução:

(a) S é uma porção de um hiperbolóide de revolução cuja equação em coordenadas cilíndricas é

$$z = \frac{1}{\rho}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < z < 2$$

O bordo de S é a união das duas semi-circunferências

$$C_1 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\} \quad C_2 = \{(x, y, 2) : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

e dos dois arcos de hipérbole

$$C_3 = \{(0, y, -\frac{1}{y}) : -1 \leq y \leq -\frac{1}{2}\} \quad C_4 = \{(0, y, \frac{1}{y}) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

O Teorema de Stokes diz que o fluxo de $\text{rot } F$ ao longo de S no sentido da normal dada é igual ao trabalho de F ao longo do bordo com C_1 percorrida no sentido horário e C_2 no sentido anti-horário quando vistas de muito acima do plano xy . Note-se que

$$F(0, y, z) = (yz, 0, 0)$$

é perpendicular ao plano yz pelo que o trabalho realizado por F ao longo de C_3 e C_4 é nulo. Podemos parametrizar C_1 e C_2 respetivamente por

$$g_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

e

$$g_2(\theta) = \left(\frac{\cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta}{2}, 2 \right), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

sendo que a parametrização g_1 percorre C_1 no sentido contrário ao pretendido. Conclui-se assim que

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } F \cdot n &= \int_{\partial S} F \\ &= \int_{C_1} F \cdot n + \int_{C_2} F \cdot n \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\cos \theta, \sin \theta, 1) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta}{2}, 2\right) \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{2}, \frac{\cos \theta}{2}, 0\right) d\theta \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta, -\cos \theta + \cos^2 \theta \sin \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \\ &\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \theta, -\cos \theta + \frac{1}{8} \cos^2 \theta \sin \theta, 0 \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta, 0 \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \\ &\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{16} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) O bordo de S é uma curva fechada, logo qualquer campo gradiente realiza trabalho nulo ao longo de ∂S . Podemos tomar por exemplo o campo vetorial constante $G(x, y, z) = \nabla(x) = (1, 0, 0)$.

4. Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x, y)$ de classe C^1 num aberto que contém a circunferência $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e calcule o máximo dessa função sobre a circunferência.

Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada (x, y) , a função $g_{x,y}(z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z$ é crescente.

Resolução: Uma vez que a função $g_{x,y}$ da sugestão é crescente (pois $g'_{x,y}(z) = 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2$ é maior ou igual a zero e anula-se quando muito em $z = 0$), a equação $g_{x,y}(z) = 2$ tem exatamente uma solução para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e em particular para pontos na circunferência. Portanto a equação $g(x, y, z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define globalmente uma função $z(x, y)$ em \mathbb{R}^2 . A alínea 1(c) garante que esta função é de classe C^1 num aberto contendo cada ponto da circunferência e portanto num aberto contendo a circunferência.

O Teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e mínimo de $z(x, y)$ na circunferência uma vez que $z(x, y)$ é contínua e a circunferência é um compacto. Nos pontos de extremo, $\nabla z(x, y)$ deve pertencer ao espaço normal à circunferência, que é gerado pelo vector (x, y) , ou seja,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

a condição imposta aos pontos de extremo é

$$y \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 4xyz^3 - 2xyz = 0 \Leftrightarrow 2xyz(2z^2 - 1) = 0$$

e obtemos o seguinte sistema para as coordenadas dos pontos de estacionariedade sobre a circunferência

$$\begin{cases} 2xyz(2z^2 - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z^5 + z = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \\ z^5 + 2z^3 = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 = 2 \end{cases}$$

onde excluímos a solução $z = 0$ da primeira equação do sistema que claramente contradiz a terceira equação. O último sistema acima não tem soluções pelo que temos quatro pontos candidatos a pontos de extremo: $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Nos primeiros temos $z^5 + 2z^3 = 2$ logo $z(\pm 1, 0) < 1$ enquanto que nos segundos temos $z^5 + z = 2$ logo $z(0, \pm 1) = 1$. Conclui-se que o máximo de $z(x, y)$ sobre a circunferência é 1.