# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 11h30

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(u,v) = f(x,y) = (x^2 + y, x + y^2)$$

   (a) Mostre que $f$ é localmente invertível em torno do ponto $(x,y) = (1,2)$ e calcule $\frac{\partial y}{\partial u}(3,5)$.

   (b) A função $f$ é invertível? Justifique.

   **Resolução:**

   (a) A função $f$ é de classe $C^1$ e

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

   logo $\det Df(1,2) = 7 \neq 0$ e o Teorema da Função inversa garante a invertibilidade de $f$ numa vizinhança do ponto $(1,2)$. Como $f(1,2) = (3,5)$, a regra de derivação da função inversa diz que

$$Df^{-1}(3,5) = Df(1,2)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   logo $\frac{\partial y}{\partial u}(3,5) = -\frac{1}{7}$ (é a entrada (1,2) da matriz $Df^{-1}(3,5)$).

   (b) Como $f(x,x) = (x^2+x, x^2+x)$ temos que $f(0,0) = f(-1,-1) = 0$ logo a função não é invertível.

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z - x + y^2 = 0, 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

   (a) Mostre que $S$ é uma variedade e indique a sua dimensão.

   (b) Calcule o integral em $S$ do campo escalar $\sqrt{1+2x-2z}$, $\int_S \sqrt{1+2x-2z}$

   **Resolução:**

   (a) $S$ é o gráfico da função de classe $C^1$ $f(x,y) = x - y^2$ sobre um aberto no plano $xy$ logo é uma variedade de dimensão 2.

(b) Uma parametrização de $S$ é dada por $g(x,y) = (x, y, x - y^2)$ com $0 < x < 1, 0 < y < x$. Temos

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2y \end{bmatrix}$$

e portanto

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 1+4y^2 \end{bmatrix}$$

O fator de conversão de áreas desta parametrização é então $\sqrt{\det Dg^T Dg} = \sqrt{2+4y^2}$ e portanto o integral pedido é dado por

$$\begin{aligned} \int_S \sqrt{1+2x-2z} &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1+2x-2(x-y^2)}\sqrt{2+4y^2}dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{2}(1+2y^2)dydx \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 x + \tfrac{2}{3}x^3 dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

3. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $F(x,y) = (x^2, y^3 + y)$ e considere a curva $C$ parametrizada por

$$g(t) = (2\cos^3 t, 2\operatorname{sen}^3 t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(a) Determine o trabalho realizado por $F$ ao longo da curva $C$.

(b) Sendo $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $G(x,y) = F(x,y) + (-2y, 2x)$ calcule o trabalho realizado por $G(x,y)$ ao longo da curva $C$.

(c) Usando o Teorema de Green calcule a área da região do plano limitada pela curva $C$.

**Resolução:**

(a) O campo $F$ é um gradiente uma vez que claramente a função $\phi(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}$ é um potencial para $F$. Uma vez que a curva $C$ é fechada, o trabalho realizado por $F$ ao longo da curva é $0$.

(b) Uma vez que $\int_C F = 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_C G &= \int_C (-2y, 2x) \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\operatorname{sen}^3 t, 4\cos^3 t) \cdot (-6\cos^2 t \operatorname{sen} t, 6\operatorname{sen}^2 t\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 24\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t + 24\operatorname{sen}^2 t\cos^4 t\ dt = \int_0^{2\pi} 24\operatorname{sen}^2 t\cos^2(t)(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 6\operatorname{sen}^2(2t)dt = 6\pi. \end{aligned}$$

(c) Sendo $A$ a região limitada pela curva $C$, o Teorema de Green diz que o integral calculado na alínea anterior é igual a

$$\int\int_A \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y)dxdy = \int\int_A 4\ dxdy = 4\ \text{área}(A)$$

Portanto a área de $A$ é igual a $\frac{3\pi}{2}$.

4. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (x, -y, y)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y^2 + z^2 = 2 + x^2, -1 < x < 2\}$$

no sentido da normal unitária $n$ que toma o valor $(0, 1, 0)$ no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$.

**Resolução:** Podemos aplicar o Teorema da Divergência ao volume

$$V = \{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y^2 + z^2 < 2 + x^2, -1 < x < 2\}$$

Temos $\operatorname{div} F = 0$ e $\partial V = S \cup D_1 \cup D_2$ onde $D_1 = \{(-1, y, z) \colon y^2 + z^2 \leq 3\}$ e $D_2 = \{(2, y, z) \colon y^2 + z^2 \leq 6\}$. Uma vez que a normal a $S$ dada é exterior a $V$ o Teorema da DIvergência diz que

$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_S F \cdot n + \int_{D_1} F \cdot (-1, 0, 0) + \int_{D_2} F \cdot (1, 0, 0) = \int_S F \cdot n + \int_{D_1} (-x) + \int_{D_2} x$$

Portanto o fluxo pedido é

$$\int_S F \cdot n = -\int_{D_1} 1 - \int_{D_2} 2 = -\text{área}(D_1) - \text{área}(D_2) = -2\pi - 6\pi = -8\pi.$$

5. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo vetorial $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x, y, z) = (x^2 y, 1, z)$$

ao longo da curva $C$ definida pelas equações $x^2 + y^2 = 7$ e $z = x$, percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

**Resolução:** A curva $C$ é o bordo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq 7, z = x\}$$

e, pela regra da mão direita, a orientação da curva é consistente com a normal $n$ a $S$ que tem terceira componente positiva. Pelo Teorema de Stokes temos

$$\int_C G = \int_S \operatorname{rot} G \cdot n$$

O rotacional de $G$ é dado por

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 1 & z \end{vmatrix} = (0, 0, -x^2)$$

e uma parametrização para $S$ é dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta), \quad 0 < \rho < \sqrt{7}, 0 < \theta < 2\pi$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = (-\rho, 0, \rho)$$

tem terceira componente positiva, o fluxo do rotacional é dado por

$$\int_0^{\sqrt{7}} \int_0^{2\pi} (0, 0, -\rho^2 \cos^2\theta) \cdot (-\rho, 0, \rho) = \int_0^{\sqrt{7}} -\pi\rho^3 d\rho = -\frac{49\pi}{4}$$

6. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1$ tal que $\operatorname{div} F = 0$ e $\int_S F \cdot n \neq 0$ onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ (e $n$ é uma normal unitária qualquer). Mostre que o campo escalar definido pelo comprimento de $F$, isto é $\|F(x, y, z)\|$, é ilimitado em qualquer vizinhança da origem.

**Resolução:** Seja $A = \int_S F \cdot n$. Aplicando o Teorema da divergência a $F$ e ao volume

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1\}$$

com $0 < \epsilon < 1$ temos

$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{S_\epsilon} F \cdot n^{ext} + \int_S F \cdot n^{ext}$$

onde $S_\epsilon$ designa a superfície esférica de raio $\epsilon$ (é imediato verificar que $S$ é uma variedade-2 pelo que $V$ é um domínio regular).

Conclui-se que para todo o $\epsilon$ entre $0$ e $1$ temos

$$A = \int_{S_\epsilon} F \cdot n^{ext}$$

Mas pela desigualdade triangular temos

$$|A| = \left| \int_{S_\epsilon} F \cdot n^{ext} \right| \leq \int_{S_\epsilon} \left| F \cdot n^{ext} \right| \leq \int_{S_\epsilon} \|F\| \leq \text{área}(S_\epsilon) \cdot \max\{\|F(x, y, z)\| \colon x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\}$$

ou seja

$$|A| \leq 4\pi\epsilon^2 \max\{\|F(x, y, z)\| \colon x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\}$$

Uma vez que $A \neq 0$, tomando o limite quando $\epsilon$ tende para $0$ vemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \max\{\|F(x, y, z)\| \colon x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\} = +\infty$$

e portanto o campo escalar $\|F\|$ é ilimitado em qualquer vizinhança da origem.