Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 8 de Junho de 2015 - 09h00

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y + z^2 = 0 \ , \ x + y + z = 0 \ \} \ .$$

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

Resposta: Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^1 (na verdade C^∞) definida por $F(x,y,z) = (x^2+y+z^2, x+y+z)$. Tem-se então $M = F^{-1}(0,0)$ e $DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. A característica de DF é igual a 2 excepto nos pontos (x,y,z) com $x = z = 1/2$, que não pertencem a M porque os pontos de M satisfazem a condição $x + z = x^2 + z^2$. Logo, M é uma variedade e a sua dimensão é 1.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(1,-2,1)$.

Resposta: $DF(1,-2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. O espaço normal é o espaço das linhas de $DF(1,-2,1)$, do qual uma base é o conjunto das linhas da matriz: $\{(2,1,2),(1,1,1)\}$. O espaço tangente é o núcleo de $DF(1,-2,1)$, que tem dimensão 1 e por isso qualquer vector não nulo do núcleo forma uma base, por exemplo $\{(1,0,-1)\}$.

2. Considere a 2-variedade $S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + xy + y^2 + z^2 = 3 \ \}$.

(2 val.) a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1,1,0)$ a condição $(x,y,z) \in S$ pode ser resolvida em ordem a x como função de classe C^1 de (y,z) e calcule $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0)$.

Resposta: Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + z^2 - 3$. Tem-se $S = F^{-1}(0)$, $DF(x,y,z) = [2x+y \quad x+2y \quad 2z]$ e $DF(1,1,0) = [3 \quad 3 \quad 0]$. Como F é de classe C^1 e $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0) \neq 0$ concluímos que a equação $F(x,y,z) = 0$ define x como função de classe C^1 de (y,z) numa vizinhança do ponto $(y,z) = (1,0)$ e que $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = -\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0) / \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0) = -3/3 = -1$.

(2 val.) b) Calcule o máximo absoluto da função $f(x,y,z) = y$ em S.

Resposta: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange o máximo absoluto tem de ocorrer num ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla F$ e $(x,y,z) \in S$:

$$\begin{cases} 0 &=& \lambda(2x+y) \\ 1 &=& \lambda(x+2y) \\ 0 &=& 2\lambda z \\ 3 &=& x^2 + xy + y^2 + z^2 \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se $\lambda \neq 0$ e portanto a primeira e a terceira são equivalentes a ter-se $2x + y = 0$ e $z = 0$. Substituindo z por 0 e y por $-2x$ na quarta equação obtém-se $3 = 3x^2$, ou seja, $x = \pm 1$. Destas duas soluções é $x = -1$ a que conduz ao maior valor de $y = -2x$, pelo que o máximo absoluto (que existe porque a variedade é compacta) é 2.

3. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+z^2} \ , \ y \ , \ \frac{z}{x^2+z^2} \right) \ .$$

(1.5 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

Resposta: Temos que $\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\log(x^2+z^2) + \frac{1}{2}y^2$ é de classe C^1 no domínio de F e $F = \nabla\phi$.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $\gamma(t) = (\cos t, e^t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Resposta:

$$\int F \cdot d\gamma = \int \nabla\phi \cdot d\gamma = \phi(\gamma(4\pi)) - \phi(\gamma(0)) = \phi(1, e^{4\pi}, 0) - \phi(1,1,0) = \frac{1}{2}(e^{8\pi} - 1).$$

4. Considere a superfície definida por

$$A = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 1 + \sqrt{x^2+z^2} \ , \ x^2+z^2 < 4 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_y < 0$.

(2 val.) a) Calcule a área de A.

Resposta: Seja $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, 1+\rho, \rho\operatorname{sen}\theta), 0 < \rho < 2, 0 < \theta < 2\pi$ uma parametrização de A. Temos,

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = (\cos\theta, 1, \operatorname{sen}\theta), \ \frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\rho\operatorname{sen}\theta, 0, \rho\cos\theta)$$

e

$$\left|\left| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|\right| = ||(\rho\cos\theta, -\rho, \rho\operatorname{sen}\theta)|| = \sqrt{2}\rho.$$

Logo,

$$V_2(A) = \int_A 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left|\left| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|\right| d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2}\rho d\rho d\theta = 4\sqrt{2}\pi.$$

(2.5 val.) b) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (xy, -y^2+1, yz)$ através de A no sentido de n.

Resposta: Temos que $\operatorname{div} G = 0$ e que o domínio ($\mathbb{R}^3$) de G é um conjunto em estrela. Logo, existem potenciais vector Φ tais que $\operatorname{rot}\Phi = G$. É fácil de verificar que uma escolha possível de potencial vector é dada por

$$\Phi(x,y,z) = \left(-z\frac{y^2}{2} + z, 0, x\frac{y^2}{2} \right).$$

Logo, pelo teorema de Stokes,

$$\int_A G\cdot n = \int_A \operatorname{rot}\Phi\cdot n = \oint_{\partial A}\Phi\cdot dg,$$

onde $g(\theta)=(2\cos\theta, 3, 2\operatorname{sen}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$, é uma parametrização de ∂A no sentido compatível com n. Logo,

$$\int_A G\cdot n = \oint_{\partial A}\Phi\cdot dg = \int_0^{2\pi}\Phi(g(\theta))\cdot g'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(18-4\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = 32\pi.$$

(2.5 val.) c) Calcule o fluxo de $H(x,y,z)=(2xz^2, y, -\frac{2z^3}{3})$ através de A no sentido de n.

Resposta: Temos $\operatorname{div} H = 1$. Seja $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1+\sqrt{x^2+z^2}<y<3\}$. Pelo teorema da divergência,

$$\int_V \operatorname{div} H = \int_V 1 = V_3(V) = \int_A H\cdot n + \int_T H\cdot n_T,$$

onde $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=3, x^2+z^2<4\}$ e $n_T=(0,1,0)$.
Ora,

$$V_3(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{1+\rho}^3 \rho\, dy\, d\rho\, d\theta = \frac{28}{3}\pi,$$

e $H\cdot n_T = y = 3$ em T, pelo que

$$\int_T h\cdot n_T = 3V_2(T) = 12\pi.$$

Logo,

$$\int_A H\cdot n = \frac{28}{3}\pi - 12\pi = -\frac{8}{3}\pi.$$

(3 val.) 5. Seja $g: I\to\mathbb{R}^2$ a função de classe C^∞ definida no intervalo $I=]0,2\pi[$ pela expressão $g(t)=(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t))$ e seja $L=\{g(t)\in\mathbb{R}^2 : t\in I\}$. Mostre que g é uma função injectiva e que $\frac{dg}{dt}(t)\neq 0$ para qualquer $t\in I$, mas que $g^{-1}: L\to I$ não é contínua. O conjunto L será uma variedade? Justifique cuidadosamente.

Resposta: Sejam $t,u\in\,]0,2\pi[$. A condição $g(t)=g(u)$ é verdadeira se e só se $\operatorname{sen} t=\operatorname{sen} u$ e $\operatorname{sen}(2t)=\operatorname{sen}(2u)$. A segunda equação é equivalente a $\operatorname{sen} t\cos t=\operatorname{sen} u\cos u$. Logo, se $\operatorname{sen} t\neq 0$ temos também $\cos t=\cos u$ e portanto $t=u$. Por outro lado, se $\operatorname{sen} t=\operatorname{sen} u=0$ então $t=u=\pi$. Logo, em ambos os casos concluímos $t=u$ e portanto g é injectiva. A derivada de g é $\frac{dg}{dt}(t)=(\cos t, 2\cos(2t))$. Os únicos valores $t\in\,]0,2\pi[$ tais que $\cos t=0$ são $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, nos quais $\cos(2t)$ tem o valor -1, pelo que $\frac{dg}{dt}(t)\neq 0$ no domínio de g. Temos também $(0,0)\in L$, pois $(0,0)=g(\pi)$, e $g^{-1}(0,0)=\pi$. Para g^{-1} ser contínua em L é necessário que seja contínua no ponto

$(0,0)$. Seja x_n a sucessão convergente de termos em L definida por $x_n = g(\frac{1}{n}) = (\operatorname{sen}\frac{1}{n}, \operatorname{sen}\frac{2}{n})$. Tem-se $\lim_{n\to\infty} x_n = (0,0)$ e, por isso, para g^{-1} ser contínua é necessário que $g^{-1}(x_n)$ seja uma sucessão convergente com limite $g^{-1}(0,0) = \pi$. No entanto $g^{-1}(x_n) = g^{-1}(g(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$ e por isso g^{-1} não é contínua. Finalmente, L não é uma variedade (de dimensão 1) porque para qualquer $\varepsilon > 0$ existem no conjunto $L \cap B_\varepsilon(0,0)$ quatro pontos distintos (x,y), $(x,-y)$, $(-x,y)$ e $(-x,-y)$ com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, e portanto L não pode ser o gráfico de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$ em nenhuma vizinhança do ponto $(0,0)$. Para demonstrar a existência dos quatro pontos distintos observamos que $\lim_{t\to 0} g(t) = (0,0)$ e que por isso existe algum ponto $t \in \,]0,\pi/2[$ tal que $g(t) \in B_\varepsilon(0,0)$. Fazendo $(x,y) = g(t)$ tem-se então $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e $g(\pi - t) = (\operatorname{sen}(\pi - t), \operatorname{sen}(2\pi - 2t)) = (\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen}(2t)) = (x,-y)$. Analogamente mostramos que $g(\pi + t) = (-x,y)$ e $g(2\pi - t) = (-x,-y)$.