Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 8 de Junho de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $M = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^3+y^3+z^3 = 0\ ,\ x+y+z=0\ ;\ x<y\ \}$.

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

Resposta: Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^1 (na verdade C^∞) definida por $F(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3, x+y+z)$. Tem-se então $M = \{(x,y,z) \in F^{-1}(0,0) : x<y\}$ e $DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. A característica de DF é igual a 2 excepto nos pontos (x,y,z) com $x^2=y^2=z^2$. Um tal ponto em M teria de ser tal que $x<0$ e $y=-x$, uma vez que nos pontos de M temos $x<y$. Mas em M também tem de ter-se $x+y+z=0$, pelo que então $z=0$ e por isso $z^2 \neq x^2$, uma contradição. Logo, a característica de DF é igual a 2 em todos os pontos de M e por isso M é uma variedade de dimensão 1.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(0,1,-1)$.

Resposta: $DF(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. O espaço normal é o espaço das linhas de $DF(0,1,-1)$, do qual uma base é o conjunto das linhas da matriz: $\{(0,3,3),(1,1,1)\}$. O espaço tangente é o núcleo de $DF(0,1,-1)$, que tem dimensão 1 e por isso qualquer vector não nulo do núcleo forma uma base, por exemplo $\{(0,1,-1)\}$.

(2.5 val.) c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,1,-1)$ a condição $(x,y,z) \in M$ pode ser resolvida em ordem a (x,y) como função f de classe C^1 de z e calcule $\frac{df}{dz}(-1)$.

Resposta: As colunas de $DF(0,1,-1)$ que contêm as derivadas parciais $\partial F/\partial x$ e $\partial F/\partial y$ formam a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, que é não-singular. Por isso, e porque F é de classe C^1, concluímos que a equação $F(x,y,z)=(0,0)$ define (x,y) como função f de classe C^1 de z numa vizinhança do ponto $z=-1$ e

$$\frac{df}{dz}(-1) = -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,-1) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) 2. Calcule o valor máximo da função $f(x,y) = x+y$ na variedade

$$L = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2 = 3\ \}\ .$$

Resposta: Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função de classe C^1 definida por $F(x,y) = x^2+xy+y^2-3$. Então $L = F^{-1}(0)$ e, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o máximo tem de ocorrer num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla F$ e $(x,y) \in L$:

$$\begin{cases} 1 &= \lambda(2x+y) \\ 1 &= \lambda(x+2y) \\ 3 &= x^2+xy+y^2 \end{cases}$$

Das primeiras duas equações conclui-se $2x + y = x + 2y$ e, portanto, $x = y$. Da terceira equação resulta então $3 = 3x^2$, ou seja, $x = \pm 1$. Destas duas soluções é $x = 1$ a que conduz a um valor positivo de f, pelo que o máximo (que existe porque a variedade é compacta) é $f(1,1) = 2$.

3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (-y + e^{x+y}, x + y + e^{x+y})$.

(1 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

Resposta: Temos que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \neq 0,$$

pelo que F não é fechado e não é gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ orientada no sentido anti-horário.

Resposta: Pelo teorema de Green, sendo F de classe C^1 no disco D limitado por C,

$$\oint_C F \cdot dg = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \int_D 2 = 2\pi.$$

4. Considere a superfície definida por

$$S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \ z > 0 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_z > 0$.

(2.5 val.) a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $H(x,y,z) = (xz, yz, -z^2 + 1)$ através de S no sentido de n.

Resposta: A divergência de H é nula e o seu domínio ($\mathbb{R}^3$) é um conjunto em estrela, pelo que existem potenciais vector Φ tal que $\operatorname{rot} \Phi = H$. É fácil verificar que

$$\Phi(x,y,z) = (y\frac{z^2}{2}, -x\frac{z^2}{2} + x, 0)$$

é um deles. Logo,

$$\int_S H \cdot n = \int_S \operatorname{rot} \Phi \cdot n = \oint_{\partial S} \Phi \cdot dg,$$

onde ∂S pode ser parametrizado, de forma compatível com n, por $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \theta \in [0, 2\pi]$. Logo,

$$\int_S H \cdot n = \oint_{\partial S} \Phi \cdot dg = \int_0^{2\pi} \Phi(g(\theta)) \cdot g'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi.$$

(2.5 val.) b) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x + y^3, y, z)$ através de S no sentido de n.

Resposta: Temos $\operatorname{div} F = 3$. Seja V o hemisfério norte da bola de raio 1. Pelo teorema da divergência,

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_V 3 = 2\pi = \int_S F \cdot n + \int_T F \cdot n_T,$$

onde $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$ e $n_T = (0, 0, -1)$. Então, $F \cdot n_T = -z = 0$ em T. Logo,

$$\int_S F \cdot n = 2\pi.$$

(2.0 val.) 5. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho de $G(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ ao longo de $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ orientada no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

Resposta: Temos $\operatorname{rot} G = (0, 0, 2)$. Seja $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$. Pelo teorema de Stokes,

$$\oint_A G = \int_D \operatorname{rot} G \cdot (0, 0, 1) = \int_D 2 = 2\pi.$$

(3 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m (com $n > m$), $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e $g : U \to M$ uma função de classe C^1 tal que Dg tem característica igual a m em todos os pontos de U. Mostre que, para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e qualquer $x = g(u) \in M$, o gradiente $\nabla f(x)$ pertence ao espaço normal a M em x se e só se u for um ponto crítico de $f \circ g$. Mostre por meio de um exemplo que se a característica de Dg for diferente de m é possível u ser um ponto crítico de $f \circ g$ sem que $\nabla f(x)$ pertença ao espaço normal.

Resposta: Vamos denotar o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto x respectivamente por $T_x M$ e $N_x M$. Seja $x = g(u)$. Então $D(f \circ g)(u) = Df(x)Dg(u)$ e u é um ponto crítico de $f \circ g$ se e só se $Df(x)Dg(u) = 0$. Esta última condição é equivalente a ter-se $\nabla f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j}(u) = 0$ para todos os valores $j = 1, \ldots, m$, ou seja, é equivalente a dizer que $\nabla f(x)$ é ortogonal a todos os vectores $\frac{\partial g}{\partial u_j}(u)$. Vamos primeiro mostrar que se u for um ponto crítico de $f \circ g$ então $\nabla f(x) \in N_x M$. Cada vector $\frac{\partial g}{\partial u_j}(u)$ é tangente a M, por ser a derivada de um caminho $\gamma(t) = g(u + te_j)$ de classe C^1 no ponto $t = 0$, e, por outro lado, a informação de que a característica de $Dg(u)$ é igual a m diz-nos que todos estes m vectores são linearmente independentes, formando por isso uma base de $T_x M$, pois este espaço tem dimensão m. Conclui-se por isso que $\nabla f(x)$ é ortogonal a todos os vectores de $T_x M$, ou seja, $\nabla f(x) \in N_x M$. Vamos agora mostrar que se $\nabla f(x) \in N_x M$ então u é um ponto crítico de $f \circ g$, e que portanto estas duas condições são equivalentes. Suponha-se que $\nabla f(x) \in N_x M$. Isto significa que $\nabla f(x)$ é ortogonal a todos os vectores de $T_x M$ e em particular aos vectores da forma $\frac{\partial g}{\partial u_j}(u)$, ou seja, $Df(x)Dg(u) = 0$. Por último vamos encontrar o exemplo pedido. Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ a variedade $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão é 1. Em qualquer ponto $(x, 0)$ o espaço normal $N_{(x,0)}$ é $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x$. Então $\nabla f(x,y) = (1,0)$ em qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pelo que $\nabla f(x,0) \notin N_{(x,0)}M$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Seja agora $g : \mathbb{R} \to M$ a função definida por $g(t) = (t^3, 0)$, cuja derivada é $g'(t) = (3t^2, 0)$ (e portanto anula-se no ponto $t = 0$, ou seja, a condição de Dg ter característica 1 é falsa em $t = 0$). Então $f(g(t)) = t^3$ e portanto $t = 0$ é um ponto crítico de $f \circ g$, mas $\nabla f(g(0)) \notin N_{g(0)}M$.