Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEFT, MEBIOM
TESTE 2 – 7 DE JUNHO DE 2008 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(3.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V da forma $\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots} dx)dy)dz$.

Resolução:

$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z}} \left(\int_0^{\sqrt{1-z-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(3.5 val.) b) Calcule o volume de V.

Resolução:

$$Vol(V) = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\rho^2} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \pi/8.$$

(2) Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2,\ 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal n tal que $n_y > 0$.

(3.5 val.) a) Calcule a massa total de S sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$.

Resolução:

Com $g(\rho, \theta)0(\rho\cos\theta, \rho^2, \rho\sin\theta), \rho \in]1, 2[, \theta \in]0, 2\pi[$, temos

$$\sqrt{\det(Dg^t Dg)} = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}.$$

Logo,

$$M(S) = \int_S \alpha = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \rho(\sqrt{1 + 4\rho^2})^2 d\rho \right) d\theta = 33\pi.$$

(3.5 val.) b) Utilize o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo $f(x,y,z) = (x, -2y, z)$ ao longo de S no sentido de n.

Resolução:

O domínio de f é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela; uma vez que $\operatorname{div} f = 0$, existe um potencial vector h tal que $\operatorname{rot} h = f$. É fácil verificar que $h(x,y,z) = (-yz, 0, xy)$ é um potencial vector para f.

O bordo de S é dado por uma circunferência de raio 2 no plano $y = 4$, A, e por uma circunferência de raio 1 no plano $y = 1$, B. Orientando S com a normal indicada, temos as parametrizações consistentes de A e B:

$$g_A(\theta) = (2\cos\theta, 4, -2\sin\theta),\ g_B(\theta) = (\cos\theta, 1, \sin\theta), \theta \in]0, 2\pi[.$$

Logo, pelo teorema de Stokes,

$$int_S f \cdot n = \int_S \operatorname{rot} h \cdot n = \oint_A h + \oint_B h = \int_0^{2\pi} (-16 + 1) d\theta = -30\pi.$$

(3) Considere o campo vectorial (3 val.)

$$h(x,y,z) = \left(x^2, \frac{y}{y^2+z^2} + \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2} + \frac{y}{y^2+z^2} \right).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $g(t) = (3t, 2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Resolução:

h é a soma do campo conservativo

$$\left(x^2, \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2} \right) = \nabla\phi,$$

onde $\phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log(y^2+z^2)$, e do campo

$$f(x,y,z) = \left(0, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2} \right).$$

Como vimos, f não é conservativo no seu domínio. Sendo $g(t)$ uma espiral que dá duas voltas ao eixo dos x no sentido anti-horário de um observador em $(1,0,0)$, temos

$$\int f dg = 4\pi,$$

como é fácil verificar. Logo,

$$\int h dg = \phi(g(4\pi)) - \phi(g(0)) + 4\pi = 4\pi + 576\pi^3.$$

(4) Determine um campo vectorial de classe C^1, $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, tal que $\operatorname{div} f = 0$ mas tal que não existe nenhum campo vectorial de classe C^2, $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, tal que $\operatorname{rot} h = f$. (3 val.)

Resolução:

É fácil verificar que o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ com

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z),$$

tem divergência nula e que não pode existir h tal que $\operatorname{rot} h = f$, uma vez que o fluxo de f através de uma superfície esférica centrada na origem não se anula. Note que f é, a menos de constante multiplicativa, o campo de Coulomb de um electrão estacionado na origem e o campo gravítico de uma massa pontual estacionada na origem.