Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

4 de Junho de 2011 - das 9h30m às 11h

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \le y \le x\right\}.$$

[3 val.] (a) Escreva uma expressão para o volume de D como integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$.

Resolução:

O conjunto D é dado de forma equivalente por

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; (x, y) \in R\right\},$$

onde R é a região planar:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x; \sqrt{x^2 + y^2} \le 1\right\},$$

ou seja, analisando os cortes y igual constante de R:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}; y \le x \le \sqrt{1 - y^2}\right\}.$$

Assim obtem-se a expressão para o volume de D:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1\, dz\right) dx\right) dy.$$

[3 val.] (b) Calcule a massa do sólido descrito por D, com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = z$.

Resolução:

O sólido D tem simetria cilíndrica à volta do eixo Oz, motivando uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas ϱ, θ, z. O intervalo para θ é: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Os cortes θ igual constante não dependem de θ e são dados por: $0 \leq \varrho \leq 1$; $0 \leq z \leq 1 - \varrho$. Assim a massa é dada por:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{1-\varrho} z\varrho \, dz \, d\varrho \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\varrho)^2 \varrho d\varrho \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{2\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{96}.
\end{aligned}$$

[3 val.] 2. Considere o campo vectorial $G(x,y) = (-y + x^3, x + y^5) + \nabla\psi(x,y)$ onde $\psi(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$. Calcule o trabalho de G ao longo da fronteira do quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$ percorrida no sentido anti-horário.

Resolução:

Pelo teorema fundamental dos integrais de trabalho, o trabalho do termo $\nabla\psi(x,y)$ é nulo, porque a fronteira C do quadrado é uma linha fechada. Para calcular o trabalho do campo $(-y + x^3, x + y^5)$, aplicamos o teorema de Green ao quadrado Q. Assim o trabalho de G ao longo de C é dado por:

$$\begin{aligned}
\int_C G \cdot dg &= \int_C (-y + x^3, x + y^5) \cdot dg \\
&= \iint_Q \frac{\partial(x + y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(-y + x^3)}{\partial y} \\
&= \iint_Q 2 = 2\mathrm{vol}_2(Q) = 8.
\end{aligned}$$

3. Sejam $F(x,y,z) = (x, y, z+1)$,

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 - x^2 - y^2;\ y > 0;\ z > 0\right\}$$

e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal a S, unitária, tal que $n_3 > 0$.

[2 val.] (a) Calcule a área de S.

Resolução: Seja $g \colon]0,1[\times]0,\pi[\to S$ a parametrização dada por

$$g(\varrho, \theta) = (\varrho\cos\theta, \varrho \operatorname{sen}\theta, 1 - \varrho^2).$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \varrho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & -2\varrho \\ -\varrho\operatorname{sen}\theta & \varrho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(2\varrho^2\cos\theta, 2\varrho^2\operatorname{sen}\theta, \varrho\right),$$

logo

$$\mathrm{vol}_2(S) = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left\| \frac{\partial g}{\partial \varrho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| d\varrho \right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{4\varrho^4 + \varrho^2} d\varrho \right) d\theta$$
$$= \pi \int_0^1 \varrho \sqrt{4\varrho^2 + 1}\, d\varrho = \pi \left[\frac{(4\varrho^2+1)^{3/2}}{12} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\pi.$$

[3 val.] (b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.

Resolução: Note-se que a terceira componente da normal $\frac{\partial g}{\partial \varrho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$ é positiva pelo que g é compatível com a orientação dada por n. Assim,

$$\int_S F \cdot n = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 F(g(\varrho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \varrho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) d\varrho \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\varrho \cos\theta, \varrho \operatorname{sen}\theta, 2 - \varrho^2 \right) \cdot \left(2\varrho^2 \cos\theta, 2\varrho^2 \operatorname{sen}\theta, \varrho \right) d\varrho \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(2\varrho^3 + 2\varrho - \varrho^3 \right) d\varrho \right) d\theta = \pi \int_0^1 \left(\varrho^3 + 2\varrho \right) d\varrho$$
$$= \pi \left[\frac{\varrho^4}{4} + \varrho^2 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5\pi}{4}.$$

[3 val.] (c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Sejam T_y e T_z as seguintes superfícies planas:

$$T_y = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \colon y = 0,\ 0 < z < 1 - x^2 \right\},$$
$$T_z = \left\{ (x, y, z) \colon z = 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

e seja D o sólido limitado por S, T_y e T_z. A normal untária exterior a D coincide com n nos pontos de S, pelo que a designamos também por n. Aplicando oTeorema da Divergência, obtemos

$$\int_S F \cdot n + \int_{T_y} F \cdot n + \int_{T_y} F \cdot n = \int_D \mathrm{div}(F) = \int_D 3$$
$$= 3 \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\varrho^2} \varrho dz \right) d\varrho \right) d\theta$$
$$= 3\pi \int_0^1 (1 - \varrho^2)\varrho d\varrho = -3\pi \left[\frac{(1-\varrho^2)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}.$$

Ora,

$$\int_{T_y} F \cdot n = \int_{T_y} F \cdot (0,-1,0) = -\int_{T_y} y = 0$$
$$\int_{T_z} F \cdot n = \int_{T_z} F \cdot (0,0,-1) = -\int_{T_z} (z+1) = -\operatorname{vol}_2(T_z) = -\frac{\pi}{2}$$

portanto, concluímos que

$$\int_S F \cdot n = \int_D \operatorname{div}(F) - \int_{T_y} F \cdot n - \int_{T_z} F \cdot n = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}.$$

[3 val.] 4. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e
$f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = f(x,y); (x,y) \in D\right\}.$$

Prove o Teorema de Stokes para a superfície S e para um campo vectorial de classe C^1, F, da forma $F = (F_1, F_2, 0)$.

Sugestão: Use o Teorema de Green.

Resolução: Uma vez que S é o gráfico de $f\colon D \to \mathbb{R}$, a função $g\colon D \to S$ dada por

$$g(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

é uma parametrização para S.

Da mesma forma, se $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização para ∂D, a função $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)))$$

é uma parametrização para ∂S.

Temos

$$\operatorname{rot}(F_1, F_2, 0) = \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Note-se que a terceira componente da normal $n = ||\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}||^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ é positiva. Portanto, percorrendo ∂S do lado indicado por n, de forma a que S

fique à esquerda, a projecção no plano $z = 0$ percorre a curva ∂D no plano xOy de forma a que D fique à esquerda.

Assim,

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}(F_1, F_2, 0) \cdot n &= \iint_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(F_2(x, y, f(x, y))\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1(x, y, f(x, y))\right)\\ &= \oint_{\partial D} F_1(x, y, f(x, y))dx + F_2(x, yf(x, y))dy,\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta da aplicação do Teorema de Green e ∂D é percorrido de forma a que D fique à esquerda.

Seja agora $\gamma\colon I \to \partial D$ uma parametrização que percorre ∂D de forma a que D fique à esquerda e seja $\alpha\colon I \to \partial S$ como acima. Das observações anteriores acerca relação entre os sentidos de γ e α, concluimos que α tem a orientação induzida por n e

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} F \cdot d\alpha &= \int_I F(\alpha(t)) \cdot \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \frac{\partial f}{\partial x}\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\gamma_2'(t)\right) dt\\ &= \int_I \left(F_1(\alpha(t))\gamma_1'(t) + F_2(\alpha(t))\gamma_2'(t)\right) dt\\ &= \oint_{\partial D} F_1(x, y, f(x, y))dx + F_2(x, y, f(x, y))dy,\end{aligned}$$

onde ∂D é percorrido de forma a que D fique à esquerda.

Portanto ,

$$\iint_S \operatorname{rot}(F_1, F_2, 0) \cdot n = \oint_{\partial S} F \cdot d\alpha.$$