**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2008 - 11h
Duração: 90 minutos

**Resolução abreviada**

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se $h$ é contínua na origem.

**Resolução:** Começamos por ver que

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|x^2+|y|y^2}{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \leq 2 \parallel (x,y) \parallel,$$

logo podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 1 + \cos 0 = 2 = h(0,0),$$

o que mostra que $h$ é contínua na origem.

2. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \sin(x^2-y) + e^{yz}$.

(2 val.) a) Calcule a derivada de $f$ segundo o vector $(1,2,3)$ no ponto $(-1,1,0)$.

**Resolução:** Sendo $f$ diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ (porque $f$ é claramente de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^3$), temos

$$\begin{aligned} D_{(1,2,3)}f(-1,1,0) &= \nabla f(-1,1,0).(1,2,3) \\ &= \left(2x\cos(x^2-y), -\cos(x^2-y)+ze^{yz}, ye^{yz}\right)\Big|_{(-1,1,0)}.(1,2,3) \\ &= (-2,-1,1).(1,2,3) = -1 \end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o gradiente de $f \circ g$ no ponto $(1,1)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $g(1,1) = (-1,1,0)$ e $g$ é diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz derivada

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Resolução:** Sendo $g$ diferenciável no ponto $(1,1)$ e $f$ diferenciável no ponto $(-1,1,0) = g(1,1)$, temos, pelo teorema da função composta:

$$\begin{aligned}\nabla(f\circ g)(1,1) &= Df(g(1,1))Dg(1,1)\\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. Considere a função $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^3 + x - 3y - 5, y + z^2)$.

(2 val.) a) Mostre que o conjunto $M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\right\}$ é uma variedade, e determine a sua dimensão.

**Resolução:**

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3x^2+1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2z\end{bmatrix}$$

portanto $F$ pertence à classe $C^1$, e a característica da matriz $DF(x,y,z)$ é 2 para qualquer $(x,y,z)$ pertencente a $M$ (porque a primeira linha da matriz tem sempre pivô $3x^2+1 \geq 1 \neq 0$, e a segunda linha também). Assim $M$ é uma variedade, e a sua dimensão é $3 - \mathrm{car} DF(x,y,z) = 3 - 2 = 1$.

(2 val.) b) Determine o espaço normal a $M$ no ponto $(1,-1,1)$ e indique um elemento não-nulo do espaço tangente a $M$ no mesmo ponto.

**Resolução:** O espaço normal a $M$ no ponto $(1,-1,1)$ é gerado pelas linhas de

$$DF(1,-1,1) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Portanto

$$(T_{(1,-1,1)}M)^{\perp} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = c(4,-3,0) + d(0,1,2);\ c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Os elementos do espaço tangente a $M$ no ponto $(1,-1,1)$ satisfazem:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0\\ y + 2z = 0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem: $z$ livre, $y = -2z$, $4x = 3y = -6z$. Escolhendo $z = 1$, um elemento não-nulo do espaço tangente a $M$ no ponto $(1,-1,1)$ é $(-3/2, -2, 1)$.

(3 val.) c) Justifique que numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com $f_1$, $f_2$ funções de classe $C^1$, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Calcule $f_1'(-1)$ e $f_2'(-1)$.

**Resolução:** Temos 1) $F \in C^1$, 2) $F(1,-1,1) = (0,0)$, 3):

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{bmatrix}\Bigg|_{(1,-1,2)} = \det\begin{bmatrix} 4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função implícita, numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com $f_1$, $f_2$ funções de classe $C^1$, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Temos ainda:

$$\begin{bmatrix} f_1'(-1) \\ f_2'(-1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 4. Determine os valores máximo e mínimo da função $g(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - z^2$ no conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

**Resolução:** Como o conjunto $S$ é compacto e $g$ é contínua, sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que $g$ tem máximo e mínimo absolutos no conjunto $S$.

No interior de $S$ procuramos os pontos de estacionaridade de $g$, ou seja, os pontos onde o gradiente se anula. Como

$$\nabla g(x,y,z) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)}, -2z),$$

a única solução é a origem e nesse ponto temos $g(0,0,0) = 1$.

A fronteira de $S$ é uma variedade de dimensão 2, definida pela equação $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$, logo podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos de $g$ em $\partial S$. Consideramos a função $h = g + \lambda F$ e resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla h(x,y,z) = (0,0,0) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda x = 0 \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2\lambda y = 0 \\ -2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(\lambda - e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2y(\lambda - e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2z(\lambda - 1) = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são os pontos $(0,0,\pm 1)$ onde o valor da função é $g(0,0,\pm 1) = 0$ e todos os pontos da circunferência definida pelas equações $x^2+y^2 = 1$ e $z = 0$. Nestes pontos o valor da função é $e^{-1}$. Portanto o valor máximo da função $g$ no conjunto $S$ é 1 e o valor mínimo é 0.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente contínua). Mostre que

$$h(x,y) = x + y + (x^2+y^2)f(x,y)$$

é diferenciável na origem e calcule $\nabla h(0,0)$. Dê um exemplo de uma função $f$ tal que $h$ não seja contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.

**Resolução:** A função $h$ é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0)\cdot(x,y)}{\| \, (x,y) \, \|} = 0$$

Usamos a definição para calcular as derivadas parciais de $h$ na origem:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = 1.$$

Assim obtemos $\nabla h(0,0) = (1,1)$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0) \cdot (x,y)}{\| (x,y) \|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} f(x,y).$$

Como $f$ é limitada existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sqrt{x^2+y^2} f(x,y) \right| = \sqrt{x^2+y^2} |f(x,y)| \leq M \| (x,y) \|,$$

donde se conclui que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} f(x,y) = 0$$

e $h$ é diferenciável na origem.

Se considerarmos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

vemos que $f$ é limitada em $\mathbb{R}^2$ e $h$ é descontínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.