

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II  
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ  
TESTE 1 – 28 DE ABRIL DE 2007 – VERSÃO 1

**Apresente e justifique todos os cálculos**

duração: 90 minutos

## Resolução

(3 val.) (1) Considere a função

$$h(x, y) = \begin{cases} 5 - 2 \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de  $a$  para que  $h$  seja contínua na origem.

**Resolução:**

$$|h(x, y) - 5| = 2 \left| \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2 \left| \frac{x(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| = 2|x| \rightarrow 0,$$

quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Logo, se  $a = 5$  então  $f$  será contínua em  $(0, 0)$ .

(2 val.) (2) Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$f(x, y) = (xy, x + y, 2x),$$

e a função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , de classe  $C^1$ , tal que

$$Dg(1, 2, 2) = [2 \quad 1 \quad 2].$$

Calcule a derivada de  $g \circ f$  no ponto  $(1, 1)$ , segundo o vector  $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

**Resolução:**

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial v}(1, 1) = [2 \quad 1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 10/\sqrt{2}.$$

(3 val.) (3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$F(x, y, z) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}yz + z^2.$$

**Resolução:**

$$\nabla F(x, y, z) = (x^2 - 1, 3y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}y + 2z).$$

Logo,  $\nabla F(x, y, z) = 0$  nos pontos  $p_{\pm} = (\pm 1, 0, 0)$ .

Temos,

$$H_f(p_{\pm}) = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Os respectivos valores próprios são as raízes de  $(\pm 2 - \lambda) \cdot ((3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) = 0$ . Assim,  $H_f(p_+)$  tem valores próprios positivos  $\lambda = 2, 4, 1$  e  $p_+$  é um mínimo local. Por outro lado,  $H_f(p_-)$  tem valores próprios  $\lambda = -2, 4, 1$  e  $p_-$  é um ponto em sela.

- (4) O tempo  $t$  e as coordenadas  $(u, v)$  de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = e^{2t} + 1 \\ u \sin(\frac{\pi}{2}u) = t. \end{cases}$$

- a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto  $(t_0, u_0, v_0) = (1, 1, e)$ , (2 val.) uma função de classe  $C^1$ , dada por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)).$$

### Resolução:

Seja,  $F(t, u, v) = (u^2 + v^2 - e^{2t} - 1, u \sin(\frac{\pi}{2}u) - t)$ . Então  $F(1, 1, e) = (0, 0)$  e  $(1, 1, e)$  é uma solução do sistema. Temos,

$$DF(1, 1, e) = \begin{bmatrix} -2e^2 & 2 & 2e \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det \frac{\partial F}{\partial (u, v)}(1, 1, e) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2e \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2e \neq 0,$$

e o teorema da função implícita garante que existe um caminho  $\alpha(t)$ , com  $t$  numa vizinhança aberta de  $t = 1$ , tal que  $F(t, \alpha(t)) = 0$ .

- b) Calcule  $\alpha'(1)$ . (1.5 val.)

### Resolução:

Temos  $F(t, \alpha(t)) = 0$ , numa vizinhança de  $t = 1$ . Logo,

$$\frac{d}{dt} F(t, \alpha(t)) \Big|_{t=1} = \begin{bmatrix} -2e^2 & 2 & 2e \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha'_1(1) \\ \alpha'_2(1) \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja  $\alpha'(1) = (1, e - \frac{1}{e})$ .

- (5) Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

- a) Mostre que  $A$  é uma variedade e determine a sua dimensão. (2 val.)

### Resolução:

$A$  é a porção com  $x > 0$  do conjunto de nível  $F^{-1}(0, 0)$  da função  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, x - y)$ .

Temos

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem característica máxima (= 2). Logo,  $A$  é uma variedade de dimensão 1.

(1.5 val.)

b) Determine um vector tangente a  $A$  no ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

### Resolução:

temos,

$$DF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As linhas desta matriz geram o espaço normal a  $A$  no ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Logo, por exemplo, o vector  $(1, 1, 2)$  é tangente a  $A$  nesse ponto.

(2 val.)

c) Parametrize  $A$ .

### Resolução:

Tomemos  $g(x) = (x, x, 2x^2)$  com  $x > 0$ . Temos,  $F(g(x)) = 0$ , pelo que  $g$  parametriza  $A$ . Note-se que  $g$  é uma parametrização: é injectiva, a sua inversa é contínua e  $g'(x) = (1, 1, 2x) \neq 0, \forall x > 0$ .

(3 val.)

(6) Mostre que a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  transforma curvas ortogonais que passam no ponto  $(0, 1)$  em curvas ortogonais que passam no ponto  $(-1, 0)$ .

### Resolução:

Temos,

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

Sejam  $\alpha(t), \beta(t)$  dois caminhos com  $\alpha(0) = \beta(0) = (0, 1)$ , que se cruzam ortogonalmente neste ponto, ou seja com  $\alpha'(0) \cdot \beta'(0) = 0$ . As suas imagens serão dois caminhos  $F \circ \alpha(t), F \circ \beta(t)$  que se intersectam em  $(-1, 0) = F(0, 1)$ . Os seus vectores velocidade nesse ponto serão

$$(F \circ \alpha)'(0) = DF(0, 1)\alpha'(0) \quad (F \circ \beta)'(0) = DF(0, 1)\beta'(0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & (F \circ \alpha)'(0) \cdot (F \circ \beta)'(0) = \\ & = \alpha'(0)^T DF(0, 1)^T DF(0, 1)\beta'(0) = \alpha'(0) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \beta'(0) = 4\alpha'(0) \cdot \beta'(0) = 0. \end{aligned}$$