Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEFT
TESTE 1 – 19 DE ABRIL DE 2008 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{2x^2 - y^3}{x^3 + 3y^2}\right).$$

Determine, justificando, se f é ou não prolongável por continuidade à origem.

Resolução:

Temos $lim_{x\to 0} f(x,mx) = \cos(\frac{2}{3m^2})$, para $m \neq 0$. Logo, existem limites direccionais distintos de f no ponto $(0,0)$ e f não tem limite nesse ponto pelo que não é prolongável por continuidade. (Note-se que $\cos$ é uma função contínua.)

(3.5 val.) (2) Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy$.

Resolução:

Temos $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, -2y + x)$. Logo, os pontos críticos são $(0,0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$. Para $(0,0)$,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

e os valores próprios são solucão de $\lambda(2+\lambda) - 1 = 0$, ou seja são $-1 \pm \sqrt{2}$. Existindo valores próprios de $H_f(0,0)$ com sinais opostos, concluímos que $(0,0)$ é um ponto em sela.

Para $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$,

$$H_f(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

e os valores próprios são solução de $(1+\lambda)(2+\lambda) - 1 = 0$, ou seja $\lambda = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Sendo ambos os valores próprios negativos, concluímos que o ponto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ é um máximo local de f.

(3) Considere a variedade-2 $E \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0\}.$$

(2.5 val.) a) Determine os pontos de E onde o espaço tangente é horizontal.

Resolução:

Se o espaço tangente é horizontal então o espaço normal será vertical. Logo, temos de ter

$$\nabla F(x,y,z) = \nabla(x^2 + 2y^2 + z^2 - 4) = (2x, 4y, 2z) = \alpha(0,0,1),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo $(x,y) = (0,0)$ e portanto $z = \pm 2$. A resposta é então dada pelos pontos $(0,0,2)$ e $(0,0,-2)$; o que, aliás, se verifica facilmente esboçando E.

b) Justifique que, na vizinhança do ponto $(1,1,1) \in E$, é possível descrever E como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $y = \phi(x,z)$. (2.5 val.)

Resolução:

Tem-se $\nabla F(1,1,1) = (2,4,2)$ pelo que $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 4 \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, a função ϕ descrita no enunciado existe.

c) Calcule $D\phi(1,1)$, onde ϕ é a função da alínea anterior. (2.5 val.)

Resolução:

Seja $\psi(x,z) = (x, \phi(x,z), z)$. Então $F \circ \psi = 0$ numa vizinhança de $(x,z) = (1,1)$. Logo

$$0 = D(F \circ \psi)(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (1,1),$$

pelo que se obtem

$$D\phi(1,1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

d) Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\gamma(t) :]1-\epsilon, 1+\epsilon[\to E$ o caminho $\gamma(t) = (t, \phi(t,t), t)$. Calcule $\gamma'(1)$. (2 val.)

Resolução:

Tem-se

$$\frac{d\phi(t,t)}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Logo,

$$\gamma'(1) = (1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1) = (1, -1, 1),$$

onde utilizámos o resultado da alínea anterior. Em alternativa, uma vez que $\gamma(t)$ descreve uma curva contida em E com $\gamma(1) = (1,1,1)$, temos de ter $\gamma'(1) \cdot \nabla F(1,1,1) = 0$, o que fornece prontamente a mesma resposta.

e) Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = 2x + 4y + z^2$ sobre E. (2 val.)

Resolução:

Utilizando multiplicadores de Lagrange, temos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 &= 4 \\ (2, 4, 2z) &= \lambda(2x, 4y, 2z) \end{cases}$$

Temos $\lambda = 1$ ou $z = 0$. Se $\lambda = 1$ então $x = y = 1$ o que implica $z = \pm 1$. Se $z = 0$ então $x = y = 1/\lambda$ o que implica $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ ou seja $x = y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$. Ou seja, o sistema tem quatro soluções $p_1 = (1, 1, -1), p_2 = (1, 1, 1), p_3 = (\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}, 0), p_4 = (-\sqrt{\frac{4}{3}}, -\sqrt{\frac{4}{3}}, 0)$. Uma vez que E é compacta e f é contínua existirá, pelo menos, um máximo absoluto e um mínimo absoluto. Substituindo os valores de f, verificamos facilmente que p_1 e p_2 são máximos e que p_4 é mínimo. Logo, o valor máximo será $f(p_1) = f(p_2) = 7$ e o valor mínimo será $f(p_4) = -6\sqrt{\frac{4}{3}}$.

(3 val.) (4) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um variedade-2 compacta e seja $u \in \mathbb{R}^3$ um vector unitário. Mostre que existem pelo menos dois pontos de S onde o espaço normal a S é gerado por u.

Resolução:

A função contínua $f_u(x, y, z) = (x, y, z) \cdot u = u_1 x + u_2 y + u_3 z$ terá, pelo menos, um máximo e um mínimo sobre S. Nesses pontos teremos que $\nabla f_u = u$ está contido, e é um gerador, no espaço normal a S. Falta ainda cobrir o caso em que estes pontos possam, por ventura, coincidir. No entanto, se o valor máximo de f_u coincidir com o valor mínimo então f_u teria de ser constante, o que só é possível se S for um pedaço de plano que não é uma variedade compacta.