Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEBIOM, MEFT
TESTE 1 – VERSÃO 1 – 18 DE ABRIL DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+(y-1)^3}{x^4+(y-1)^2}, & (x,y) \neq (0,1) \\ 0, & (x,y) = (0,1) \end{cases}.$$

Determine, justificando, se h é ou não diferenciável no ponto $(0,1)$.

RESOLUÇÃO:

Os limites direccionais de h em $(0,1)$ não são iguais:

$$\lim_{x\to 0} h(x, 1+mx) = \frac{1}{m^2}.$$

Logo h não é contínua em $(0,1)$ não podendo ser diferenciável nesse ponto.

(3 val.) (2) Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = e^x(y^2 - x)$.

RESOLUÇÃO:

$\nabla f(x,y) = e^x(y^2 - x - 1, 2y) = (0,0) \implies y = 0, x = -1$. Logo, o único ponto crítico de f é $(-1,0)$.

Temos

$$H_f(-1,0) = e^x \begin{bmatrix} y^2-x-2 & 2y \\ 2y & 2 \end{bmatrix}(-1,0) = e^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo $(-1,0)$ é um ponto em sela.

(3) Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6,\ x+y+z = 3\}.$$

(3 val.) a) Justifique que, na vizinhança do ponto $(1,1,1)$, A é o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(x,y) = (f_1(z), f_2(z))$, definida numa vizinhança aberta de $z = 1$.

RESOLUÇÃO:

Seja $F(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6, x+y+z-3)$. Então, $F(1,1,1) = 0$ e

$$DF(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,1) = \det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Logo, o teorema da função implícita garante a existência de f.

b) Calcule $Df(1)$. (3 val.)

RESOLUÇÃO:

Seja $\psi(z) = (f_1(z), f_2(z), z)$. Então $F \circ \psi = 0$ numa vizinhança aberta de $z = 1$. Logo,

$$DF(1,1,1) \cdot D\psi(1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1'(1) \\ f_2'(1) \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

o que fornece $f_1'(z) = 1, f_2'(1) = -3$.

c) Determine se o vector $(1, -2, 1)$ é ou não tangente a A no ponto $(1, 1, 1)$. (2.5 val.)

RESOLUÇÃO:

$\{(2, 4, 6), (1, 1, 1)\}$ é uma base do espaço normal a A em $(1, 1, 1)$. Como $(2, 4, 6) \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, 1) \cdot (1, -2, 1) = 0$ o vector $(1, -2, 1)$ pertence ao espaço tangente a A em $(1, 1, 1)$.

d) Determine se os valores da função $\phi(x, y, z) = x - y + z$ sobre A atingem ou não um máximo local no ponto $(1, 1, 1)$. (2 val.)

RESOLUÇÃO:

$$\frac{d}{dz}_{|z=1} \phi(x(z), y(z), z) = 1 + 3 + 1 = 5 \neq 0.$$

Logo, a restrição de ϕ a A não tem um máximo local em $(1, 1, 1)$.

(4) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, tal que $h(0, 0) = 0$ e tal que $(0, 0)$ é ponto crítico de h com $H_h(0, 0)$ definida positiva. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla g(0, 0) = (-2, 1)$. (2 val.)

Verifique que $\varphi(x, y) = g(h(x, y), h(x, y))$ tem um ponto crítico na origem e classifique-o.

RESOLUÇÃO:

Temos

$$\nabla\varphi(0,0) = (\partial_1 g \partial_x h(0,0) + \partial_2 g \partial_x h(0,0), \partial_1 g \partial_y h(0,0) + \partial_2 g \partial_y h(0,0)) = (0,0),$$

uma vez que $\nabla h(0, 0) = (0, 0)$. Logo, $(0, 0)$ é ponto crítico de φ. Temos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0) = (\partial_1 g + \partial_2 g)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0) = (\partial_1 g + \partial_2 g)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(0,0) = (\partial_1 g + \partial_2 g)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Logo,

$$H_\varphi(0,0) = (\partial_1 g + \partial_2 g)(0,0) \cdot H_h(0,0) = -H_h(0,0),$$

que é definida negativa. Logo $(0, 0)$ é um mínimo local de φ.

(2.5 val.) (5) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m tal que, na vizinhança de $p \in M$, M pode ser descrita simultâneamente como conjunto de nível da função de classe C^1 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ e como conjunto de nível da função de classe C^1 $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, onde se tem que $DF(p)$ e $DG(p)$ têm ambas característica $(n-m)$.

Mostre que o espaço das linhas da matriz $DF(p)$ é igual ao espaço das linhas da matriz $DG(p)$. (Ou seja, mostre que a definição de espaço normal que viu na aula é independente da escolha de F.)

RESOLUÇÃO:

Suponhamos que as últimas $(n-m)$ colunas de $DF(p)$ são linearmente independentes. Escrevendo $x = (z, y)$ com $z \in \mathbb{R}^m, y \in R^{n-m}$, o teorema da função implícita garante que é possível descrever M localmente, numa vizinhança de p, como um gráfico da forma $y = f(z)$. Logo, teremos $F(z, f(z)) = G(z, f(z)) = 0$ para z num aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $\psi(z) = (z, y(z))$ e $p = (z_0, f(z_0))$. As m colunas da matriz

$$D\psi(z_0) = \begin{bmatrix} I_m \\ Df(z_0) \end{bmatrix},$$

são independentes. Logo, como $DF(p) \cdot D\psi(z_0) = DG \cdot D\psi(z_0) = 0$, temos que o espaço das linhas de $DF(p)$ coincide com o espaço das linhas de $DG(p)$ sendo ambos coincidentes com o complemento ortogonal do espaço das colunas de $D\psi(z_0)$. Logo, o espaço normal de M em p está bem definido, sendo independente da escolha de F.