Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 10 de Novembro de 2012 - 14h30 - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

Resolução:

$$\left| \frac{y^3}{2x^2+y^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0,$$

quando $(x,y) \to (0,0)$. Logo, f é contínua na origem.

(1 val.) (b) Determine as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 1.$$

(1 val.) (c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Resolução:

A derivada de f na origem, se existir, será necessariamente dada pela matriz Jacobiana $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y.$$

Ora,

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|2x^2y|}{\sqrt{x^2+y^2}(2x^2+y^2)},$$

não tem limite quando $(x,y) \to (0,0)$, o que facilmente se verifica porque os limites direccionais com $y = mx$ dependem de m:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2mx^3}{\sqrt{x^2+m^2x^2}(x^2+2mx^2)} = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}(1+2m)}.$$

Logo, f não é diferenciável na origem.

(3 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $Df(0,0,e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e seja $h(x,y,z) = f(xy^2z^3, \operatorname{sen} x, ze^{5-y^2})$. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,-2,1)$.

Resolução:

Seja $\psi(x,y,z) = (xy^2z^3, \operatorname{sen} x, ze^{5-y^2})$, de modo que $h = f \circ \psi$ e $\psi(0,-2,1) = (0,0,e)$. Então, com $f = f(x_1,x_2,x_3)$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,-2,1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0,e)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0,-2,1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0,e)\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0,-2,1) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,0,e)\frac{\partial \psi_3}{\partial x}(0,-2,1)$$

$$= (1 \cdot y^2z^3 + 2 \cdot \cos x + 3 \cdot 0)_{|(x,y,z)=(0,-2,1)} = 4 + 2 + 0 = 6.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y^2 - (x^2-1)^2$.

Resolução:

Temos $\nabla f(x,y) = (-2x(x^2-1), 2y)$. Logo, f tem 3 pontos críticos: $(0,0),(1,0),(-1,0)$. A Hessiana de f é dada por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2+4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, $H_f(0,0)$ é a matriz diagonal com valores próprios 4 e 2, pelo que $(0,0)$ é um mínimo local. Nos pontos $(\pm 1, 0)$ a matriz Hessiana de f é diagonal com valores próprios -8 e 2, pelo que estes pontos críticos são ambos pontos em sela.

(2 val.) 4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Sendo $f(x,y) = 2xe^{y^2}$, calcule $\int_A f$.

Resolução:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} 2xe^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 ye^{y^2} = \frac{1}{2}(e-1).$$

5. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2.5 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de S na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$Vol(S) = \int_S 1 = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz.$$

(2.5 val.) (b) Calcule o volume de S.

Resolução:

Em coordenadas cilíndricas:

$$Vol(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^\rho \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

(3 val.) 6. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3. Mostre, detalhada e justificadamente, que

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial x \partial y}.$$

Resolução:

Sendo g de classe C^3, as suas derivadas parciais são de classe C^2. Logo, podemos aplicar o teorema de Schwarz a g e às suas derivadas parciais:

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial x \partial y}.$$