Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os Cursos

Teste de Recuperação/Exame (Versão 1) - 29 de Janeiro de 2011 - 9h

Duração do Teste: 90 minutos Duração do Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

<u>1^0Teste</u>

(1.5 val.) 1. Seja $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

(1.5 val.) 2. Seja $g(x,y)=x^2y+3xy^4$ e $h(t)=(\operatorname{sen} 2t, \cos t)$. Calcule $D(g\circ h)(0)$, usando a regra de derivação da função composta.

3. Seja $f(x,y)=x^2+y^2-2y+4$.

(1.5 val.) a) Classifique os extremos de f em $\mathbb{R}^2$.

(1.5 val.) b) Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de f na região

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq 4\}.$$

(1.5 val.) c) Justifique que numa vizinhança de $(0,0)$ a equação $f(x,y)=4$ define implicitamente uma função $y=y(x)$ de classe C^1, e calcule $y'(0)$.

(1 val.) 4. Determine os valores de $K\in\mathbb{R}$ para os quais o conjunto

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad x^3+y^3-3=K\}$$

é uma variedade-1 em $\mathbb{R}^2$.

5. Indique, <u>justificando</u>, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(0.25 val.) a) A função $f(x,y)=(x-y,0)$ tem inversa.

(0.25 val.) b) Se $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é diferenciável em $(0,0)$ então $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0$.

(1 val.) c) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)=L$, e se, para todo o x e para todo o y, existirem os limites unidimensionais

$$\lim_{x\to a} h(x,y), \quad \lim_{y\to b} h(x,y)$$

então

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} h(x,y)\right]=\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} h(x,y)\right]=L.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os Cursos

Teste de Recuperação/Exame (Versão 1) - 29 de Janeiro de 2011 - 9h

Duração do Teste: 90 minutos   Duração do Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

2^0 Teste

1. Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(1.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de A da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dx \right) dy \right) dz.$$

(1.5 val.) b) Calcule o volume de A.

2. Considere a curva $L \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\beta(t) = (t, t^2, t^3), t \in [1,2]$, e com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = 1/\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}$.

(1 val.) a) Calcule a massa total de L.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho do campo vectorial

$$h(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+z^2} + y, x + z, \frac{z}{x^2+z^2} + y \right)$$

ao longo de L.

3. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 < z < 2\},$$

orientada com a normal unitária n, com a terceira componente negativa.

(1.5 val.) a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x + \cos z, y + \sin z, -2z)$ através de M no sentido de n.

(1.5 val.) b) Seja $G(x,y,z) = (0,0,1)$. Calcule o fluxo de G através de M no sentido de n, usando o teorema de Stokes.

(1.5 val.) 4. O teorema da divergência em $\mathbb{R}^2$ afirma que se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio regular, com normal exterior unitária n, e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1, então

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} F \cdot n.$$

Mostre que este teorema é equivalente ao teorema de Green.