Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação/Exame – Versão 2 – 24 de Junho de 2011 – 8h
Duração Teste: 90 minutos – Duração Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste I

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+4y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(1 val.) (a) Mostre que g é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\nabla g(0,0)$ e a derivada de g na origem segundo o vector $v = (3,1)$. O que pode concluir acerca da diferenciabilidade de g na origem?

(1.5 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dh(0,e) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

e seja $f(x,y) = (2xy^2, e^{x^2+y})$. Calcule $D(h \circ f)(0,1)$.

(1.5 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = 2y - y^2 - 2x^2 + x^4$.

(1 val.) 4. Considere a função $F(x,y) = (2xy, y^3 + \cos x)$. Justifique que F é invertível localmente em torno do ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Calcule a derivada da função inversa local no ponto $(\pi, 1)$.

5. Seja $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, e^{(x+2)^2} + y^2 + z^2 = 3\}$.

(1 val.) (a) Mostre que N é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1 val.) (b) Escreva uma equação para o plano tangente à variedade N no ponto $(-2, 0, \sqrt{2})$.

(1 val.) (c) Determine o(s) ponto(s) de N mais próximo(s) do ponto $(-2,0,0)$.

(1 val.) 6. Sejam $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 e suponha que g não tem pontos de estacionaridade. Mostre que se $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de estacionaridade de $g \circ f$ então $\det(Df(P)) = 0$.

Teste II

1. Considere a região $B \subset \mathbb{R}^3$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, z + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2, y \geq 0\}.$$

(1.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de B da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

(1.5 val.) b) Calcule o volume de B.

2. Considere a elipse C de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$.

(1 val.) a) Calcule a carga total do fio eléctrico que tem a configuração da elipse C, sabendo que a densidade de carga eléctrica é dada por $\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8x^2+4}}$.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho do campo vectorial

$$G(x, y) = \left(\frac{3x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{3y}{x^2 + y^2} + \frac{-2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

ao longo da elipse C percorrida no sentido anti–horário.

3. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ y > 0,\ z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n com $n_3 > 0$. Seja $F(x, y, z) = (-2x, y, z + 1)$.

(1.5 val.) a) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pelo teorema da divergência.

(1.5 val.) b) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pelo teorema de Stokes.

(1.5 val.) 4. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo e $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança parametrizável de uma variedade compacta de dimensão m. Mostre que $\int_U \psi$ é independente da parametrização.