Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação/Exame – Versão 1 – 24 de Junho de 2011 – 8h
Duração Teste: 90 minutos – Duração Exame: 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste I

1. Seja$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{3x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(1 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\nabla f(0,0)$ e a derivada de f na origem segundo o vector $v = (1,2)$. O que pode concluir acerca da diferenciabilidade de f na origem?

(1.5 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ,$$

e seja $h(x,y) = (\cos(x+y^2), xy)$. Calcule $D(g \circ h)(-1,1)$.

(1.5 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -y + y^2 + x^2 - x^4$.

(1 val.) 4. Considere a função $F(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), xy)$. Justifique que F é invertível localmente em torno do ponto $(0,\pi)$. Calcule a derivada da função inversa local no ponto $(0,0)$.

5. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + e^{(y+1)^2} + z^2 = 4\}$.

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1 val.) (b) Escreva uma equação para o plano tangente à variedade M no ponto $(\sqrt{3}, -1, 0)$.

(1 val.) (c) Determine o(s) ponto(s) de M mais próximo(s) do ponto $(0,-1,0)$.

(1 val.) 6. Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 e suponha que f não tem pontos de estacionaridade. Mostre que se $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de estacionaridade de $f \circ g$ então $\det(Dg(P)) = 0$.

Teste II

1. Considere a região $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2}, z + x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}.$$

(1.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de D da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(1.5 val.) b) Calcule o volume de D.

2. Considere a elipse E de equação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(1 val.) a) Calcule a carga total do fio eléctrico que tem a configuração da elipse E, sabendo que a densidade de carga eléctrica é dada por $\sigma(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3y^2+9}}$.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho do campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{-3y}{x^2+y^2} + \frac{4(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, \frac{3x}{x^2+y^2} + \frac{4y}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

ao longo da elipse E percorrida no sentido horário.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 3,\ x > 0,\ z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n com $n_3 > 0$. Seja $G(x,y,z) = (x+1, y, -2z)$.

(1.5 val.) a) Calcule o fluxo $\int_S G \cdot n$ pelo teorema da divergência.

(1.5 val.) b) Calcule o fluxo $\int_S G \cdot n$ pelo teorema de Stokes.

(1.5 val.) 4. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo e $V \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança parametrizável de uma variedade compacta de dimensão k. Mostre que $\int_V \varphi$ é independente da parametrização.